UNIVERSIDAD NACIONAL MICAELA BASTIDAS DE APURÍMAC

FACULTAD DE EDUCACIÓN

ESCUELA ACADÉMICO PROFESIONAL DE EDUCACIÓN

ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

"MATERIAL DIDÁCTICO ALGEPLANO EN EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS EN TERCER GRADO DE SECUNDARIA DE LA I. E. AURORA INÉS TEJADA, ABANCAY - 2010"

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN ESPECIALIDAD MATEMÁTICA E INFORMÁTICA.

PRESENTADO POR:

- Bach. Alex Aniceto PUMACAYO VERA
- Bach. Luis Alberto ALATA NARVAEZ

ASESOR: Mg. CESAR E. CUENTAS CARRERA

Abancay, Noviembre del 2010

PERÚ

MATERIAL DIDÁCTICO ALGEPLANO EN EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS EN TERCER GRADO DE SECUNDARIA DE LA I.E. AURORA INÉS TEJADA, ABANCAY-2010

DEDICATORIA:

A nuestros padres por su apoyo incondicional desde que emprendimos este viaje, en un mar de sueños y esperanzas.

A nuestros hermanos y amigos por el apoyo moral, durante el desarrollo de éste proyecto.

AGRADECIMIENTO

Expresamos nuestra sincera gratitud a las personas que contribuyeron a este esfuerzo, aportando valiosas sugerencias, críticas constructivas, apoyo moral y material:

A nuestro asesor Mg. César CUENTAS CARRERA, por su permanente, sistemática y acertada orientación hasta concluir con el presente trabajo de tesis.

Mg. Carmen QUIZÁ AÑASCO, quien nos colaboró con su experiencia profesional como docente del área de matemática en cuanto al uso del material educativo.

Prof. Juan J. AEDO, quien nos colaboró con su experiencia profesional como educador de aula, en la orientación, y uso del material didáctico algeplano.

Al Ing. Wilson MOLLOCONDO, quien nos asesoró y colaboró en realizar la parte estadística de éste trabajo.

A los maestros de la facultad de educación de la Universidad Nacional Micaela Bastidas de Apurímac, por su constante preocupación en la formación y capacitación en temas de investigación.

Al director Lic. Alfredo CHAMORRO MELÉNDEZ, a la profesora de aula Marlene CHIPANA DAMIÁN y a las alumnas de la sección "C" y "D" de tercer grado de Secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay - 2010, quienes colaboraron afablemente, sin ninguna condición en la ejecución de éste trabajo.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS E INTREPRETACIÓN DE RESULTADOS

ANEXO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE GRÁFICAS

RESUMEN

El trabajo de tesis: material didáctico algeplano en el aprendizaje significativo de las ecuaciones cuadráticas en tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay - 2010, responde a dar solución al problema de la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas y mejorar significativamente el aprendizaje de las alumnas.

El objetivo principal de la investigación es: el uso del material didáctico algeplano en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas, se logra un aprendizaje significativo de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay-2010. La hipótesis planteada es: con el uso del material didáctico algeplano, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas, se logra un aprendizaje significativo en las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay-2010. El tipo de investigación es aplicada con diseño cuasi experimental con pre-test y post-test. Los sujetos de la muestra fueron las alumnas de la sección "C" (grupo experimental) y "D" (grupo control).

El resultado obtenido fue por diferencia de medias, lo cuál confirma que el promedio de los calificativos del grupo experimental es significativamente superior al promedio de calificativos del grupo control, la prueba de hipótesis de trabajo se analizó e interpretó por la distribución normal, ratificando la aceptación de la hipótesis alterna.

La conclusión a que se arribo es: el uso del material didáctico algeplano, permite a las alumnas conjugar los conocimientos de álgebra y geometría elemental de los grados anteriores creando un estudio metódico de las ecuaciones cuadráticas representando e identificando los términos, las dimensiones, los signos, la variable, etc., para fortalecer sus capacidades de intuición y abstracción, con la participación activa dado su carácter lúdico, desafiante y vinculado con el mundo natural, ofreciendo situaciones de aprendizaje entretenida y significativa.

ABSTRACT

The work of thesis: Didactic material algeplano in the significant learning of the quadratic equations in third degree of secondary school of the I.E. Aurora Inés Tejada of Abancay's district - 2010, learning answers for giving solution to the problem of teaching the quadratic equations and improving the schoolgirls' learning significantly.

The main objective of investigation is: Demonstrating than with the use of the didactic material algeplano in the process of teaching learning of the quadratic equations, a significant learning of the third-degree schoolgirls of secondary school of the I.E. Aurora Inés Tejada of Abancay's district achieves 2010 itself. The presented hypothesis is: With the use of the didactic material algeplano, in the process of teaching learning of the quadratic equations, a significant learning in the third-degree schoolgirls of secondary school of the I.E. Aurora Inés Tejada of Abancay's district achieves 2010 itself. The kind of investigation is applied with quasi experimental design with Pre-Test and Post-Test. The subjects of the sample educated the schoolgirls of the section C (experimental group) and D (group control).

The obtained result was for difference of stockings, it which one confirms that the average of the epithets of the experimental group is the average significantly superior of epithets of the group control, the hypothesis testing of work it was analyzed and he interpreted for normal distribution, ratifying the approval of the alternating hypothesis.

The conclusion to than himself arrival is: The use of the didactic material algeplano, it allows the schoolgirls combining the knowledge of algebra and elementary geometry of the previous degrees creating a methodical study of the quadratic equations representing and identifying terms, the dimensions, the signs, the variable, etc., In order to strengthen your capacities of intuition and abstraction with the active participation once your symbol related to games, challenging was given and linked with the natural world offering learning entertaining situations and significant.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación consiste, en introducir a los estudiantes en el mundo de las ecuaciones cuadráticas, con una visión lúdica, concreta con experiencias agradables, donde el material didáctico **ALGEPLANO,** ofrece una nueva estrategia para fortalecer la enseñanza- aprendizaje de los estudiantes.

El objetivo de la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas, en el nivel secundario es hacer que los estudiantes desarrollen sus capacidades de razonamiento y demostración, comunicación matemática y resolución de problemas; que se expresa en el conocimiento de los conceptos y resolución de problemas diversos. Para el logro de éste objetivo, es imprescindible que los docentes, que enseñan ésta unidad tengan un amplio y profundo conocimiento del álgebra, para así proveer de una amplia cultura matemática a sus estudiantes.

El trabajo titulado, "*Material didáctico algeplano en el aprendizaje significativo de las ecuaciones cuadráticas en tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay-2010",* resulta del involucramiento, en ésta problemática durante las prácticas pre profesionales realizadas en diversos centros educativos y de indagaciones realizadas, de las condiciones académicas y metodológicas del profesor y de las situaciones de aprendizaje de los estudiantes. Por ello, nos proponemos implementar una forma secuencial, interactiva y dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje de ecuaciones cuadráticas, a través del uso del material didáctico algeplano para superar las deficiencias y las limitaciones, en la asimilación de los contenidos temáticos y su aplicación en la resolución de problemas; rescatando aportes importantes del diseño de instrucción, de los métodos activos y del constructivismo, que se vienen implementando en la última década en el Perú y distintos países de Latinoamérica.

El tipo de estudio es "cuasi-experimental", realizado con dos grupos: un grupo experimental y otro de control. La medición se efectuó mediante una prueba de entrada (pre-test) y una prueba de salida (post-test). El procesamiento de datos se llevó a cabo mediante la decisión estadística, a través de las medidas de tendencia central y prueba de hipótesis para la diferencia de medias.

El presente informe se distribuye en cuatro capítulos, como se detalla a continuación:

En el primer capítulo, se realiza una descripción detallada del área problemática, haciendo un diagnóstico integral de la situación real del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas; luego, se determina y formula el problema de investigación, los objetivos, la justificación e importancia, los alcances y limitaciones de la investigación.

En el segundo capítulo, se realiza una exposición de la definición de algunos términos básicos, mención de algunos antecedentes del tema de investigación y presentación del marco teórico que orienta y sustenta nuestro trabajo de investigación. Se detalla concepciones del material didáctico, antecedentes del algeplano, descripción del material didáctico algeplano, proceso de enseñanza-aprendizaje, aprendizaje significativo, contenidos de ecuaciones cuadráticas y marco conceptual.

En el tercer capítulo, se expone el sistema de hipótesis de la investigación, se identifican las variables operacionalizadas y se detallan los indicadores. Asimismo, se describe el procedimiento metodológico seguido, con indicación de la población y muestra, explicación de las acciones realizadas, en el estudio, la validez y confiabilidad de resultados, procedimiento de experimentación y evaluación, así como las técnicas utilizadas para el tratamiento de los datos.

En el cuarto capítulo, se aborda el análisis, presentación y la interpretación de los resultados de la prueba de entrada, de la evaluación del proceso (lista de cotejo y cuadernillo de actividades), de la prueba de salida y el cuestionario dirigida a las alumnas del grupo experimental, administrada al final del proceso de experimentación; para luego dar las conclusiones, sugerencias a partir de los resultados del trabajo experimental realizado.

En la sección anexos, se anexan la matriz de consistencia, los antecedentes académicos de la muestra en estudio, las pruebas de entrada y salida, el cuestionario administrado, asimismo los planes de clases, del proceso de experimentación y fotos de las alumnas que participaron en la ejecución del proyecto.

El presente trabajo se completa con los algeplanos, a su vez con una guía teórica, un cuadernillo de actividades, ejercicios sobre contenido y desarrollo de las ecuaciones cuadráticas con el uso de algeplanos.

En la guía teórica y cuadernillo se desarrolla diferentes praxis, tales como las representaciones geométricas de los diferentes tipos o formas de ecuaciones cuadráticas de una sola variable con coeficientes enteros, y la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Finalmente, a través del presente trabajo esperamos haber alcanzado el propósito primordial del estudio, cuál es mejorar la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA Y OBJETIVOS

1.1. ÁREA PROBLEMÁTICA: DIAGNÓSTICO SITUACIONAL

El estudio, la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la educación secundaria persigue propósitos esencialmente formativos, que consiste en: desarrollar habilidades, promover actitudes positivas y adquirir conocimientos matemáticos.

En la educación secundaria del país, la enseñanza y aprendizaje de la matemática, es deficiente. Esto se expresa en la cantidad considerable de alumnos desaprobados; es decir, el bajo rendimiento en matemática es un problema latente.

Según VILCHEZ GUIZADO, Jesús (2007), indica que en el Plan Nacional de Capacitación Docente, "PLANCAD" y Programa Nacional de Formación en Servicio (PNFS), que tuvieron como fin mejorar la calidad de la educación, privilegiando las estrategias metodológicas y el aprendizaje cognitivo, no se establecieron conexión con temas específicos de la matemática y no tuvo los frutos esperados, puesto que en el proceso de capacitación se puso énfasis en recetas metodológicas, descuidando lo fundamental: el conocimiento de temas matemáticos de parte del docente, y también debido a la falta de motivación y esfuerzo de la mayoría de los docentes participantes, que asistieron por imposición y motivación económica, como expresaron capacitados y capacitadores.

La implementación del paradigma constructivista, denominado "Nuevo Enfoque Pedagógico", no tuvo efectos visibles en la mejora de la calidad del rendimiento académico en matemática del nivel secundario. Puesto que los docentes no asimilaron suficientemente las virtudes de los nuevos enfoques pedagógicos, que se sustentan en la enseñanza por competencias, que propugnan el aprendizajes conceptual, procedimental y actitudinal, que se da a través de cinco momentos: **motivación, actividad básica, actividad práctica, evaluación y extensión** del proceso de enseñanza-aprendizaje, con la finalidad de buscar aprendizajes significativos y eficiente formación matemática de los estudiantes. Pero estas propuestas quedaron sólo en buenas intenciones, debido a factores personales, profesionales, académicos, por falta de predisposición, para el cambio de la mayoría de los docentes-alumnos que no son motivados para el aprendizaje individual y cooperativo, y las autoridades educativas locales que no cumplen, en su totalidad con su rol de asesoría y supervisión.

Esta problemática se observa también en el departamento de Apurímac, según el último resultado de la Evaluación Censal del Estudiante (ECE) en el año 2009, realizado por el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI), a los estudiantes de primaria. De la región Apurímac, se sitúa en las últimas ubicaciones, sólo superando a cuatro departamentos (Huánuco, Loreto, San Martin y Ucayali). El problema persiste desde mucho tiempo atrás, con tendencia a empeorar, por la escasa preparación académica y metodológica de los profesores, que se expresa en:

- Falta de actualización e innovación en temas de enseñanza.
- Escasa preparación en recursos, estrategias y metodologías de enseñanza.
- Carencia de ética y compromiso con su misión de educador.
- La falta de equilibrio en la enseñanza de la matemática entre sus fines formativo, funcional e instrumental, durante la acción educativa.

- El escaso material bibliográfico, para abordar el estudio de la matemática y los textos vigentes de matemática, son elaborados conforme a la propuesta curricular del Ministerio de Educación, sin un ápice de creatividad, ni adecuados a la realidad, los que son desarrollados en el aula.

  Otros factores que dificultan el proceso de enseñanza-aprendizaje, que repercuten en el aprendizaje de los estudiantes son:

- Falta de elaboración y manejo de materiales y medios didácticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.
- La deficiente utilización de los pocos recursos, medios y materiales didácticos que existe en las instituciones educativas.

1.2. DETERMINACIÓN DEL PROBLEMA

Consideramos que el responsable principal, del proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática es el docente, por ello recogemos lo vertido por Pedro GÓMEZ durante el II CONEM-99: "*yo veo al profesor de matemáticas como un diseñador y ejecutor de experiencias que pone a los estudiantes en interacción con él mismo, con los otros estudiantes y con el conocimiento que poseen para que puedan construir este conocimiento matemático que queremos que todos obtengan; por consiguiente el profesor debe ser un profesional; y para ser un profesional, tener el conocimiento producto de esa disciplina, de esa profesión y debe ser capaz de describir y caracterizar el estado de comprensión de los estudiantes. Si no sabe en qué estado están los estudiantes, no puede saber a qué estado puede llevarlos*". ([1])

De las averiguaciones hechas, al docente del área de matemática del nivel secundario del distrito de Abancay, realizan sus clases utilizando el método tradicional, teniendo

[1] GOMEZ, Pedro (1996) *La Problemática de las Matemáticas Escolares*. Bogotá: Iberoamericana. Pág. 27.

al estudiante, como un mero receptor de la información, y no orientan a utilizar el método activo donde el estudiante, crea sus propias capacidades y logros de aprendizaje significativo.

Por otro lado, es una necesidad reajustar el contenido de ecuaciones cuadráticas en un contexto más simple de manejar e implementar nuevas formas de enseñanza a través de materiales manipulativos y con participación de los estudiantes. Porque la enseñanza-aprendizaje de la matemática es un proceso que se adquiere, a partir de la primera infancia: inicial y primaria, la cuál es la base fundamental del alumno donde debe lograr los conocimientos previos de la matemática. Donde el profesor y los textos de referencia, se centran en utilizar, representaciones simbólicas con letras, sin hacer comprender la relación que existe con los números y su diferencia fundamental. Cuando debería de preocuparse la forma de enseñar y hacer entender que cada variable representa una cantidad: ¿Por qué el estudiante tiene tanta dificultad en manejar los símbolos, variables y signos matemáticos en una ecuación?, esto provoca que la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas sea un problema a un mayor, porque se agrega el cuadrado creando tres términos no juntos (término cuadrático, término lineal y término independiente) y como consecuencia dos respuestas. Teniendo en cuenta estos factores hemos observado las siguientes dificultades en los estudiantes:

- Limitado: de conocimientos previos, de la relación del número con la variable, así como de otras nociones algebraicas.
- Comprensión del lenguaje simbólico de la matemática.
- La necesidad de memorizar, las expresiones algebraicas para resolver ecuaciones cuadráticas, sin entender su significado.
- La casi nula actitud participativa individual y grupal de las alumnas, en sus procesos de aprendizajes en las ecuaciones cuadráticas.

- La ausencia de aplicación de las ecuaciones cuadráticas, en la vida diaria.
- Identificar la variable de una ecuación y despejar esta.
- Identificar los términos de una ecuación cuadrática (termino cuadrático, lineal e independiente).
- Identificar el coeficiente de una ecuación.
- Encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática
- No saben aplicar correctamente la ley de los signos.
- El error común que se comete, no se sabe aplicar la formula general y a veces mucho menos factorizar.

Conociendo las problemáticas del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática y específicamente de las ecuaciones cuadráticas, una de las estrategias es la implementación del desarrollo de clases, a través del uso del material didáctico algeplano, y elaboración de un cuadernillo de trabajo: teórico y práctico para el desarrollo de las actividades y ejercicios en forma activa en la enseñanza-aprendizaje de ecuaciones cuadráticas, que propicie el aprendizaje eficaz tanto individual como grupal con mejoras significativas en el rendimiento académico.

1.3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.3.1. Problema general

¿Con el uso del material didáctico algeplano en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas; es posible lograr un aprendizaje significativo de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada, del distrito de Abancay – 2010?

1.3.2. Problemas específicos

1. ¿De qué manera la representación de las ecuaciones cuadráticas con el material didáctico algeplano es efectivo y contribuye en el aprendizaje significativo de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada, del distrito de Abancay - 2010?

2. ¿En qué forma el material didáctico algeplano apoya en la resolución de las ecuaciones cuadráticas, para optimizar el aprendizaje significativo de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada, del distrito de Abancay - 2010?

3. ¿Qué actitudes demuestran las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada, del distrito de Abancay, para el logro del aprendizaje significativo de las ecuaciones cuadráticas con el uso del material didáctico algeplano?

1.4. OBJETIVOS

Los objetivos planteados en el siguiente estudio están enmarcados y orientados a resolver los problemas descritos:

1.4.1. Objetivo general

Demostrar que con el uso adecuado del material didáctico algeplano, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas, se logra un aprendizaje significativo de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay – 2010.

1.4.2. Objetivos específicos:

1. Comprobar la efectividad del material didáctico, algeplano en la representación de las ecuaciones cuadráticas y lograr un aprendizaje significativo de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada, del distrito de Abancay - 2010.

2. Verificar en qué forma el material didáctico, algeplano apoya en la resolución de las ecuaciones cuadráticas para optimizar el aprendizaje significativo de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada, del distrito de Abancay - 2010.

3. Conocer la actitud de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay, para el logro del aprendizaje significativo de las ecuaciones cuadráticas con el uso del material didáctico algeplano, durante las sesiones de aprendizaje.

1.5. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA

Ésta investigación es necesaria, para mejorar y dar solución a las diferentes dificultades que presentan los estudiantes de tercer grado de secundaria, en la unidad de ecuaciones cuadráticas, como es: despejar la variable o incógnita de una expresión algebraica, simplificar los términos semejantes de una ecuación cuadrática, remplazar el valor numérico de la variable, realizar las operaciones algebraicas como la suma, resta, multiplicación, división; así mismo muchas de las alumnas tienden a memorizar las expresiones algebraicas para resolver las ecuaciones cuadráticas; porque el desarrollo de la unidad de ecuaciones cuadráticas a través del material didáctico algeplano, permite a las alumnas relacionar los conocimientos de álgebra y geometría elemental de los grados anteriores y un estudio metódico de las ecuaciones cuadráticas representando fácilmente e identificando los términos, las dimensiones, los signos, la variable, etc., para fortalecer sus capacidades de intuición y abstracción, ofreciendo situaciones de aprendizaje entretenida y significativa, dado su carácter lúdico, desafiante y vinculado con el mundo natural; así mismo favorece a la participación activa y autónoma de las alumnas en sus propios procesos de aprendizaje.

La importancia del trabajo, radica que el uso del material didáctico algeplano, apoya a los estudiante a concebir y entender, mucho mejor los diferentes temas de ecuaciones cuadráticas, facilitando y motivando en la construcción de sus conocimientos matemáticos en el fortalecimiento de sus capacidad de intuición, abstracción. Y un mejor aprovechamiento de los docentes, con clases desarrolladas de manera activa orientado el aprendizaje individual y grupal, propiciando el logro de aprendizajes significativos, a través de la adquisición de los conocimientos previos y el uso pertinente de éste material educativo.

1.6. ALCANCES Y LIMITACIONES

1.6.1. Alcances

El presente trabajo está referido a la realidad educativa, en el nivel de educación secundaria, del departamento de Apurímac. Según estudio del INEI (2007-2009), es el segundo departamento más pobre del Perú.

El trabajo de investigación se desarrolló, con las alumnas del tercer grado de secundaria de la Institución Educativa Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay.

Los resultados y conclusiones de ésta investigación tienen validez interna y externa; como tal pueden generalizarse a la población, de todos los estudiantes del tercer grado de secundaria de la localidad de Abancay; sin embargo, en un sentido macro los resultados son extensibles a otros grados de estudio y otras asignaturas en los centros educativos de la región sur del Perú.

1.6.2. Limitaciones:

El desarrollo de la presente investigación presenta las siguientes limitaciones:

- Escases de antecedentes de investigación sobre el material didáctico algeplano.
- **Escasa bibliografía especializada del tema.**
- **Desconocimiento de parte de los docentes, el uso del material didáctico algeplano.**

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

En el proceso de estudio, se han encontrado trabajos vinculados al uso de medios y materiales educativos, con la finalidad de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en el nivel secundario, son los siguientes:

1. PEÑA GARCIA, Zulema Patricia y ROMÁN VASQUEZ (1998), Zenaida Luliana, titulado: *"Uso del geoplano y rendimiento académico en simetrías de figuras geométricas en alumnos del cuarto grado de educación secundaria del colegio estatal "Cesar Vallejo" San Pedro de Chunán – Jauja",* cuyas tesis se llevo a cabo en la Universidad del Centro del Perú.

Cuyo objetivo general fue:

- Determinar los efectos en el rendimiento académico, por la aplicación del geoplano en el tema simetrías de figuras geométricas en los alumnos del 4to grado del Colegio Estatal "Cesar Vallejo" San Pedro de Chunan – Jauja.

Sus objetivos específicos fueron:

- Diseñar y construir el geoplano para ser empleado en el proceso de enseñanza – aprendizaje de simetría de figuras geométricas.
- Experimentar la enseñanza – aprendizaje de simetrías de figuras geométricas mediante el uso del geoplano en los alumnos del 4to .grado de educación secundaria del colegio estatal "cesar Vallejo" San Pedro de Chunan – Jauja.

- Comprobar que la enseñanza – aprendizaje de simetrías de figuras planas a través del uso del geoplano es afectivo y eleva el rendimiento académico de los alumnos del 4to grado de educación secundaria del colegio estatal "Cesar Vallejo" San Pedro de Chunan – Jauja.

Llegando a las siguientes conclusiones:

❖ El uso del geoplano como material didáctico, en el proceso enseñanza-aprendizaje de simetrías de figuras geométricas eleva significativamente el rendimiento académico, de los alumnos con una probabilidad de error = 0, 05 y 95% de certeza.

❖ Es factible la enseñanza- aprendizaje de la simetría de figuras geométricas a través del uso del geoplano como material didáctico propuesto, en los alumnos del cuarto grado "B", porque se incrementa las puntuaciones de 8,00 a 15,00.

❖ El geoplano como instrumento auxiliar, en su construcción, el alumno desarrolla destrezas y habilidades manuales.

2. SULCA ARBAIZA, Arturo (2000) *"Uso de la regla y el compás para la enseñanza aprendizaje de la matemática en educación secundaria",* tesis de magister en educación con mención en enseñanza de la matemática, PUCP. Sostiene que el uso de la regla y el compás durante las sesiones de clase, elevan el rendimiento de los alumnos en el dominio, cognoscitivo de algunos temas de la matemática en la educación secundaria. Del proceso experimental que realiza con alumnos del cuarto grado de secundaria. Confirma significativamente su planteamiento y concluye que:

"El uso de la regla, el compás en la solución de problemas geométricos, hace que el alumno tenga mayor preocupación, por el aprendizaje comprensivo, es decír, las construcciones motivan el trabajo escolar. El solo hecho de estar manipulando objetos con la regla y el compás o las escuadras nos conducen a concentrarnos, y su uso adecuado nos permite deducir y verificar sus propiedades".

3. ARCHI GRACIA, Betty Maribel y PAUCAR SOCUALAYA, Mérida María (2002) presentan la tesis titulada *"El aprendizaje de áreas de regiones poligonales a través de la utilización de tangram en alumnos del cuarto grado de educación secundaria del centro educativo "Jorge Basadre" – Huancayo 2002".* Llevándose a cabo en la facultad de Pedagogía y Humanidades de la Universidad Nacional del Centro del Perú.

Siendo su objetivo general:

- Demostrar la influencia del tangram, en el aprendizaje de áreas de regiones poligonales, en los alumnos del cuarto grado de educación secundaria.

Al término del trabajo presentan las siguientes conclusiones:

- La utilización del tangram ha permitido en el grupo experimental incrementar de 10 a 12 alumnos, dentro del nivel de comprensión.
- La experimentación del tangram ha permitido incrementar el nivel de aplicación de 6 a 24 alumnos, respecto al tema de áreas de regiones poligonales, en alumnos del cuarto grado de educación secundaria.
- El uso del tangram permite incrementar, en los alumnos, el nivel de aplicación en la solución de problemas.

4. BURGOS NAVARRETE, Viadys, GUYNETT Y FICA RIFFO, Dámaris Natalia, (2005) *"juegos educativos y materiales manipulativos: un aporte a la disposición para el aprendizaje de las matemáticas"*. Tesis para optar al título de licenciado en Educación con especialización Universidad Católica de Temuco – Chile. La investigación efectuada es de tipo cualitativa, la cual se define como un proceso activo, llegando a la siguiente conclusión: "el uso de estos recursos permite captar la atención de los alumnos y alumnas, generando en ellos el deseo de ser participes

activos de las actividades que con éstos se desarrollan. Si bien los alumnos en la cotidianeidad dan un uso de entretención a los juegos, al ser éstos utilizados para una función educativa provocan en ellos dos efectos; que son el de divertirlos y a la vez el de enseñarles, de tal forma que el aprendizaje que se genere sea significativo, por lo cual, no será olvidado por el estudiante y perdurará a través del tiempo Las estrategias metodológicas utilizadas cumplen la función de invitar al alumno o alumna a aprender a partir de sus conocimientos y capacidades".

Además desempeñan funciones de socialización, aumentando el interés y desarrollando procesos de pensamiento, siendo un agente que rompe con la rutina de las clases normales. Es aquí en donde el docente cumple un rol de mediador de los aprendizajes, por ello debe saber manejar los factores, que pueden influir en el desarrollo de las clases, tal como es el caso de la indisciplina, frente a la cual se debe poseer un dominio de la metodología a utilizar, de igual forma un dominio de grupo. El manejo de dichos factores de parte del docente permitirá alcanzar los objetivos planteados".

5. DIONISIO GARMA, Máximo (2006) *"El método heurístico para la enseñanza aprendizaje de la matematiza básica a nivel universitario",* tesis doctoral en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Educación. Trabajo experimental con pre y pos-prueba de grupos aleatorizados, realizada en la Universidad Nacional Agraria de la Selva de Tingo María, durante el mes de mayo del 2004, considerando como población de estudio a los alumnos matriculados en el curso de matemática básica, donde puso en práctica la enseñanza de ecuaciones e inecuaciones mediante el método heurístico. En cuya conclusión, "se establece la eficacia del método heurístico y plantea su implementación, como método de enseñanza en el sistema universitario, primariamente en la asignatura de matemática básica de la Universidad Nacional Agraria de la Selva de Tingo María. Mediante éste método el estudiante ejercita sus facultades mentales, aumentando sus iniciativas personales y desenvolviendo su espíritu de investigación, con relación a los métodos de enseñanza tradicionales utilizados por los docentes".

6. MARLENI MENDOZA TORREN, Luz (2009) *"Recursos y materiales para la enseñanza-aprendizaje de la representación de fracciones"*, tesis para grado académico de magister en la enseñanza de la matemática en la Universidad Nacional San Antonio Abad de Cusco, la investigación efectuada es de tipo cualitativa y cuantitativo, de carácter mixto donde incluye un estudio de caso, realizado el al I.E Simón Bolívar, Pichu Alto de la ciudad de Cusco. Llegando a las siguientes conclusiones "hemos propuesto una forma de mirar los errores que cometen los estudiantes y una clasificación de las mismos en tres ejes y conviene profundizar y completar esa clasificación ejemplo la organización de errores dentro del efectivo o la organización de errores dentro del eje de carencia de sentido.

Los estudiantes deben manejar la mayor variedad de representación.

En conclusión con esta investigación se alcanzaron una gran parte de los propósitos que se tenía contemplado para el grupo 1C de la I.E Simón Bolívar Pichu Alto de la ciudad de Cusco. Algunos de ellos se lograron que los estudiantes reconozcan las diversas representaciones y realicen traducciones de una representación a otra utilizando diverso recursos y materiales".

2.2. MATERIAL DIDÁCTICO

Es un conjunto de elementos concretos de carácter instrumental, que facilita al estudiante la comprensión y fijación. Todo material didáctico debe facilitar la comunicación, presentando contenidos que estén de acuerdo a los interese de los estudiantes, los valores culturales de la comunidad y del país, utilizando un lenguaje, formas e ilustraciones comprensibles y atractivas.

Según OGALDE Y BARDAVID (2003), *"los materiales didácticos son aquellos medios y recursos que facilitan el proceso de enseñanza – aprendizaje, dentro de un contexto educativo global, y sistemático la función de los sentidos para acceder más fácilmente a la información, a la adquisición de habilidades y destrezas, y a la formación de actitudes y valores".* ([2])

De acuerdo a esta conceptualización, tanto el documento en que se registra el contenido del mensaje, como los aparatos analizados para emitirlo se consideran, como material didáctico.

ÁLVAREZ al respecto (1996), en su libro "actividades matemáticas con materiales didácticos", utiliza el de material didáctico para referirse a. *"Todo objeto, juego, medio técnico, etc. Capas de ayudar al alumno a suscitar preguntas, sugerir conceptos o materializar ideas abstractas".* ([3])

De forma similar se expresa Alsina, BURGUÉS y FURTUNY en (1988), al afirmar que: *"Bajo la palabra material se agrupan todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar, describir, entender y consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases del aprendizaje".* ([4])

En consecuencia los materiales didácticos deben reunir las condiciones, de ser interesante y adecuado para las alumnas, parecerse lo más posible a la realidad y

---

[2] OGALDE, Isabel (2003). *Los materiales didácticos, medios y recursos de apoyo a la docencia.* México D.F.: Trillas, Pág.21.

[3] ÁLVAREZ, A. (1996). *Actividades matemáticas con materiales didácticos.* Madrid: MEC-Narcea. Pág. 9.

[4] ALSINA, C., BURGUÉS, C. Y FURTUNY. (1988). *Materiales para construir la geometría.* Madrid: Síntesis, Pág. 13.

poseer valor social, contribuir al desarrollo de las facultades anímicas del estudiante y facilitar la actividad del docente.

2.2.1. Caracterización del material didáctico

- Permite que los estudiantes realicen actividades de forma autónoma. En muchos casos sirven para desarrollar el trabajo en grupo sobre un tema en particular.
- Contribuye a la formación de respetar las reglas, las cuales deben ser claras y sencillas.
- En lo posible deben ser construidos por los estudiantes.
- Es un reto para los estudiantes que trabajan, sólo con lápiz y papel, pues actuarán desde otra perspectiva: manipulan, desarrollan procedimientos, estrategias y finalmente formalizan.

2.2.2. Clasificación del material didáctico

Según MARQUÉS (2000), señalando que los recursos educativos en general se suelen clasificar en tres grandes grupos, cada uno de los cuales incluye diversos subgrupos:

Materiales convencionales:

a) Impresos: libros, fotocopias, periódicos, documentos, b) tableros didácticos: pizarra, franelograma, c) materiales manipulativos: recortables, cartulinas, d) Juegos: arquitecturas, juegos de sobremesa,... e) materiales de laboratorio.

Materiales audiovisuales:

a) Imágenes proyectables: diapositivas, fotografías, b) materiales sonoras: videos, programas de televisión, c) materiales audiovisuales: montajes audiovisuales, películas, videos, programas de televisión.

Nuevas tecnologías:

a) Programas informáticos, b) servicios telemáticos: páginas Web, correo electrónico, chats, foros, etc. ([5])

Esta propuesta muy reflexionada por el autor, por la organización en tres grupos grandes, el primer grupo se encuentra aquellos que siempre se han utilizado y se siguen utilizando por los docentes de aula, en un segundo grupo son aquellos que se observan y escuchan, por ultimo en un tercer grupo se encuentra aquellos que gracias al avance de la tecnología se están creando y mejorando día a día.

Los materiales que utilizaremos en el proyecto serán del primer tipo es de primer grupo (materiales manipulativos).

2.2.3. Importancia de los materiales didácticos

Según el Programa de Mejoramiento de la Calidad de las Escuelas Básicas de Sectores Pobres (PMCEBSP - 2002), *"la presencia de materiales didácticos en el aula o en la escuela, ejerce una positiva influencia en los aprendizajes de los alumnos y alumnas por razones tales como las siguientes"* ([6]):

- Contribuye a la implementación de un ambiente letrado y numerado; es decir, a un entorno donde los alumnos acceden a materiales escritos, cuya cercanía y utilización los lleva a familiarizar con las características del lenguaje escrito y con sus diversas formas de utilización.

- Permite que el profesor, ofrezca situaciones de aprendizaje entretenidas y significativas para los alumnos, dado su carácter lúdico, desafiante y vinculado con su mundo natural.

[5] MARQUËS, (2000). *Recursos Educativos*: http://dewey.uab.es/pmarques/medio.htm

[6] PROGRAMA DE MEJORAMIENTO DE LA CALIDAD DE LAS ESCUELAS BÁSICAS DE SECTORES POBRES (PMCEBSP - 2002). *Guia de Utilización del Material Didáctico. Pág. - 900.*

- Contribuye a la participación activa y autónoma de los alumnos en sus propios procesos de aprendizaje, dado que los desafía a plantearse interrogantes, a hacer descubrimientos, a crear y anticipar situaciones, a efectuar nuevas exploraciones y abstracciones.
- Estimula la interacción entre pares y el desarrollo de habilidades sociales tales como, establecer acuerdos para el funcionamiento en grupo, escuchar al otro, respetar turnos, compartir, integrar puntos de vista, tomar decisiones, saber ganar y perder, etc.
- Proporciona un acercamiento placentero y concreto hacia los aprendizajes de carácter abstracto, como es el caso del lenguaje escrito de la matemática.

De forma similar ROJAS (2001), señala "*que los materiales educativos hacen posible la ejercitación del razonamiento y la abstracción para generalizar, favoreciendo la educación de la inteligencia, para la adquisición de conocimientos.*

También hace que el aprendizaje se lleve a cabo sin requerir un esfuerzo excesivo y agotador por parte de los niños que tantas veces los desmoraliza, permitiéndolas una enseñanza real y no ficticia". ([7])

Estos autores reconocen la importancia de su utilización, por su trascendencia en el proceso de enseñanza aprendizaje; porque motivan el aprendizaje, permiten el desarrollo de ciertas habilidades visuales y auditivas, reconocemos el aporte más importante que favorecen o facilitan la adquisición de conocimientos, etc.

2.2.4. Orientaciones para el uso de los materiales manipulativos

Según el MED del Perú (2007), *"los materiales manipulativos se pueden utilizar para trabajar de forma individual, en grupo o en clase. Pero lo que no debe perderse de vista es que constituyen sólo un punto de partida para la investigación matemática,*

[7] HERNANDEZ ROJAS, (2000). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. Pág. 115.

teniendo en cuenta que cada actividad se puede desarrollar en distintas direcciones y a distintos niveles. Sin dejar de estimular a los estudiantes para que desarrollen sus propias líneas de investigación, descubriendo por sí mismos una serie de estrategias y procesos matemáticos". ([8])

Para trabajar con materiales manipulativos se deben considerar cuatro pasos:

Paso 1. Es imprescindible una motivación y un esfuerzo inicial para realizar la tarea, ya sea individualmente o en grupo. Es importante responder preguntas como estas: ¿Qué estás haciendo?, ¿Qué estás investigando?, ¿Qué vas a hacer a continuación?

Paso 2. En esta fase los estudiantes deben abordar el problema, anotan ideas, establecen relaciones, sugieren esquemas, plantean conjeturas, deben utilizar diagramas, dibujos y palabras. Las preguntas pueden ser: ¿Qué opinan de esto?, ¿Por qué dan esa opinión?

Paso 3. En esta fase se comprueba la conjetura, se predice el resultado y luego se comprueba. Las preguntas pueden ser: ¿Sirve ese resultado?, ¿Puedes explicar cómo lo has hecho?

Paso 4. En esta fase es importante que se produzca un desarrollo posterior de la investigación, la exploración de otros problemas que puedan surgir, el planteamiento de nuevos temas. Las preguntas pueden ser: ¿Qué has descubierto?, ¿Qué podrías cambiar?

2.2.5. Elementos que influyen en el uso de los materiales didácticos

La utilización de materiales didácticos en el aula de matemáticas está condicionada por una serie de elementos que plantean diversos problemas y dificultades:

El profesor: La formación científica y didáctica del profesor y sus concepciones sobre la matemática y su aprendizaje influyen notablemente a la hora de decidir la

[8] MINISTERIO DE EDUCACIÓN DEL PERÚ (2007). *Materiales educativos y el aprendizaje de la matemática.* Ediciones El Nocedal S.A.C. Perú. 1ra Ed. Pág. 67.

conveniencia de utilizar, un determinado material didáctico con los alumnos. Así, el profesor que tenga como objetivo prioritario provocar en sus estudiantes experiencias matemáticas justificará la necesidad de emplear material didáctico diverso. Por el contrario, el que considere la enseñanza-aprendizaje de la matemática como un simple proceso de transmisión de conocimientos, no verá necesario utilizar otro recurso distinto al de la pizarra y la tiza. El desconocimiento del profesor de la existencia de estos materiales y recursos o de cómo y dónde conseguirlos es otro factor que condiciona su empleo.

El alumno: El interés, la motivación, la disciplina, el nivel de los alumnos son factores que también influyen en la decisión de emplear recursos y materiales didácticos. Aunque con estos objetos se puede mejorar las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas, se hace indispensable la existencia de unas condiciones mínimas, en lo que respecta al comportamiento de los estudiantes para poder garantizar el desarrollo de un trabajo efectivo. Un excesivo número de alumnos, por clase también puede ocasionar dificultades en la organización del trabajo a realizar.

El Centro educativo: La filosofía, la cultura escolar del centro y la infraestructura que ofrece son dos factores que pueden llegar a plantear dificultades importantes al profesor interesado en utilizar recursos y materiales didácticos en el aula. Por una parte, el ambiente de trabajo en el que se desenvuelve el profesor condiciona su labor como docente, siendo fundamental que encuentre en otros profesores del área el respaldo y la crítica necesarios para poder usar estos objetos con criterio.

2.2.6. Fuente y propósito de los materiales manipulativos

Se debe tener presente de donde provienen los materiales educativos y los propósitos por los cuales fueron creados. Algunos materiales educativos provienen de la vida diaria; otros son especialmente creados con fines educativos, como es el caso de los materiales didácticos, entre estos se pueden distinguir los creados con un fin específico y los que se crean con propósitos variados.

Materiales manipulativos creados con propósitos específicos: Son materiales creados especialmente para facilitar un determinado aprendizaje. Muchos de los materiales educativos creados con propósitos específicos pueden ser incluidos en modalidades de usos más amplios.

Materiales manipulativos creados con propósitos variados: Este tipo de material tiene una finalidad educativa la cual es flexible; por esta razón puede ser objeto de diferentes usos.

2.3. ANTECEDENTES DEL MATERIAL DIDÁCTICO ALGEPLANO

a) El modelo de área en la enseñanza

El modelo de área para representar cuadrados de binomios y ecuaciones cuadráticas alcanza cierta difusión en la enseñanza escolar en los años 60 y 70 a través del trabajo del Dr. Zoltán Dienes. Este matemático y didacta húngaro, en colaboración con el psicólogo cognitivo Dr. Jerome Bruner, trabaja en un proyecto cuyo objetivo es enseñar estructuras matemáticas a niños de escuela básica (entre 5 y 13 años), en concordancia con el enfoque de la enseñanza de la matemática de la época. Para esto se apoya en el uso de manipulativos (materiales concretos) especialmente diseñados, con los cuales busca representar lo más "puramente" posible los conceptos matemáticos y lógicos que se consideran pueden ser estudiados en esas edades.

Siguiendo el pensamiento del BRUNER, quien elabora un modelo evolutivo de desarrollo conceptual que toma en cuenta las formas de "*representación activa (donde los alumnos manipulan materiales directamente), icónica (en que trabajan con imágenes de objetos, sin manipular los mismos) y simbólica (en que estrictamente se* *manejan símbolos, sin apelar a imágenes ni objetos)"* ([9]), Dienes crea materiales y juegos variados para el tratamiento inicial de ideas lógicas y matemáticas.

Entre los primeros están los bloques aritméticos multibase (BAM o bloques Dienes) constituidos por cubos de lado 1, regletas de la forma 1 por x (x toma un valor conocido) y placas cuadradas y cubos de lado x, utilizados para favorecer la comprensión de las propiedades de los sistemas de numeración posicionales y de los algoritmos estándares. Estos materiales adoptan otro uso para la enseñanza del álgebra, interpretándose x como una variable, permitiendo así la materialización de expresiones cuadráticas, y la representación del proceso de factorización de las mismas y viceversa.

A continuación se presenta una figura extraída del libro de L. RESNICK y W. FORD: La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos (1990), que muestra claramente el uso de los bloques recogidos para factorizar ecuaciones cuadráticas.

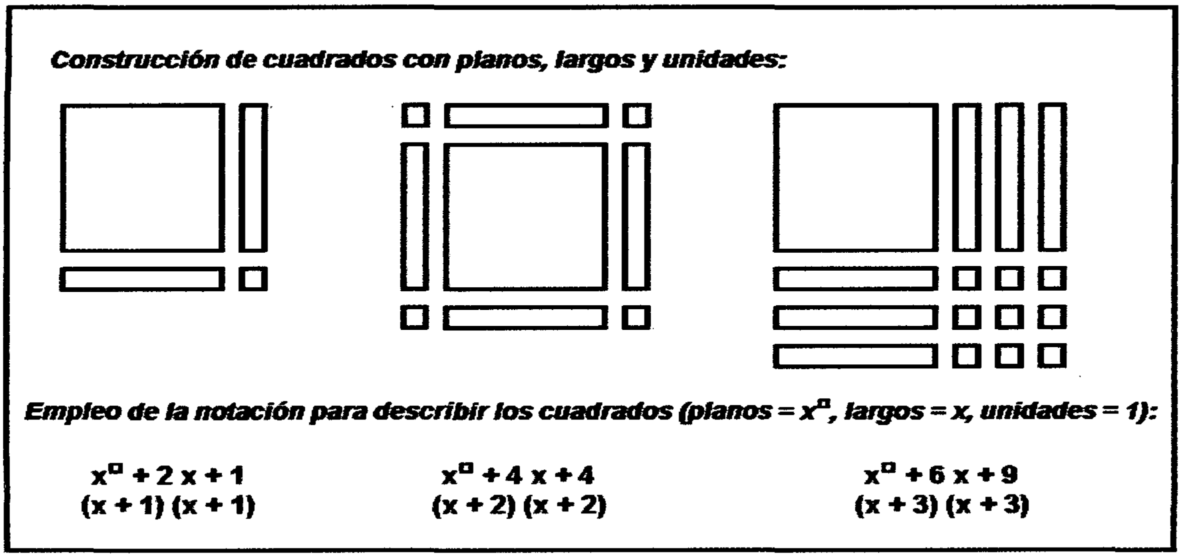


FIG 4.6. Materialización concreta del principio de factorización de una ecuación de segundo grado. (Adaptado de Bruner, 1966.)

---

[9] RESNICK, L. y FORD, W. (1990). *La enseñanza de la matemática y sus fundamentos psicológicos*. Paidós. Pág. 147.

Dienes sostiene, dos principios esenciales que deben cumplir las diversas materializaciones de que se haga uso en las aulas para enseñar estructuras matemáticas o lógicas: el de *variabilidad perceptual,* que debe permitir al niño "ver" la estructura que se desea enseñar desde distintas concretizaciones del mismo concepto, con el fin de enriquecer la imagen mental que obtenga del mismo. Esto implica que el alumno pueda abstraer las regularidades o propiedades esenciales de la estructura o concepto con independencia de las formas específicas que adopten los materiales; y el de *variabilidad matemática,* que ayuda a la generalización de un concepto a otros contextos, proveyendo a los alumnos de oportunidades de apreciar la idea de variación de la/s variable/s interviniente/s en la estructura o concepto a enseñar.

DIENES (1970) dice al respecto, *"realmente, carece de objeto que exhibamos ante el niño una variable si antes no la ha visto variar. En cambio, si la variable ha variado de modo efectivo, en la experiencia del niño, la cuestión es bien distinta y no hace falta mucho tiempo para convencerle de que "representar un número cualquiera" por una letra es siempre una economía de expresión.*
El principio de variabilidad perceptual exige abundancia de experiencias concretas sobre la misma estructura conceptual, de modo tal, ahora también, que todos los niños puedan extraer la idea abstracta esencial que es inherente a toda fórmula". ([10])

Estos principios siguen teniendo vigencia hoy día y deberían ser tenidos en cuenta por los docentes al confeccionar materiales (e incluso al elaborar situaciones problemáticas para el aula).

---

10 DIENES, Z. (1970). Conceptos algebraicos. Cap. 4 en *La construcción de las matemáticas*. Ed. Vicens-Vives. Barcelona. Pág. 60 a 90.

En contraposición con el amplio uso de los BAM en aritmética, que llega incluso hasta nuestros días, el empleo del material Dienes para el álgebra ([11]) no tuvo la misma repercusión. Hoy sólo queda en los textos alguna ilustración del modelo cuadrangular aplicado a mostrar, por ejemplo, la no distributividad de la potencia en el caso de binomios al cuadrado con el ánimo de que los alumnos "vean" en la gráfica que $(a+b)^2$ no es igual a a^2+b^2, alejándose totalmente de la intención con que este autor diseñara esos materiales.

Los motivos pueden ser variados:

- Los materiales concretos no suelen ser usados en la escuela secundaria y el estudio del álgebra recién se comienza en ella.
- La fuerte impronta analítica de la matemática moderna, mucho más centrada en lo simbólico que en lo perceptual.
- Las críticas que sobrevinieron a las experiencias de Bruner y Dienes a las que se les adjudican falta de una evaluación seria. (Resnick y Ford, 1990, p. 142).

- Las críticas de varios autores al pensamiento de Dienes, quienes advierten que el paso por la concretización, nada asegura sobre el descubrimiento y la abstracción para todos los niños de los conceptos matemáticos, que se supone ella representa.

Se pueden trabajar los materiales tan mecánica e incomprensivamente, como los propios símbolos matemáticos. Otro argumento sostenido acerca de las limitaciones del uso del material, lo dan quienes advierten, que no existe un isomorfismo probado entre las acciones mentales y las físicas que realizan los alumnos, por ejemplo al resolver operaciones aritméticas con materiales y por escrito, ni que la matemática subyacente en los modelos materiales sea "concreta" para los alumnos, ya que la

[11] Estos materiales se replican hoy incluyendo otros formatos Ver Mancera Martínez, E., *Matebloquemática, la forma de aprender matemáticas haciéndose la vida de cuadritos*; Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1998 y el artículo en Internet del mismo autor.

misma, obvia el conocimiento informal que traen los mismos. (Gravemeijer K., 1994. pág. 77 a 105; Freudenthal H., 1991, pág. 76).

Sin embargo, consideramos hoy que el modelo de área, puede brindar otra perspectiva al estudio de propiedades algebraicas a alumnos con dificultades para encontrar el sentido de las mismas, con los recursos puramente simbólico-deductivos de esta rama de la matemática.

La historia del álgebra aporta a esta idea como veremos a continuación, aunque en la obra de Dienes no hemos encontrado ninguna referencia al respecto. Si bien, en los textos que vamos a citar, no se hace tampoco mención al uso de materiales concretos, sino a representaciones geométricas y expresiones algebraicas con distinto grado de evolución, es posible que en la enseñanza abarquemos estas formas de modelización según las necesidades de nuestros alumnos.

b) El modelo de área en la historia del álgebra

Es aceptado por numerosos autores que estudiar, la historia de un concepto es una buena forma de enseñar ese concepto. En relación a esto, Santiago FERNÁNDEZ ([12]), destaca que en las orientaciones didácticas de la ESO (Educación Secundaria Obligatoria), se mencionan como aspectos destacables de la utilización de la historia de la matemática:

- Proporcionar contextos apropiados para introducir o afianzar determinados contenidos.
- Permitir que los alumnos perciban la evolución temporal de las matemáticas.

[12] FERNÁNDEZ, Santiago, (2001); La historia de las matemáticas en el aula en UNO. *Revista de Didáctica de las matemáticas*. Barcelona. 2001. GRAO. Pág. 9-10.

- Informar sobre cuáles han sido los modos de razonamiento matemático en el transcurso del tiempo, qué conceptos son difíciles, cuáles han servido para afianzar teorías, etc.

También, allí se puntualiza que el estudio y el uso de la historia de la matemática deben estar al servicio de la enseñanza y no ser un fin en sí mismo.

La presentación de las matemáticas, en el aula se puede realizar a partir de distintos temas: evolución de los principales conceptos matemáticos; surgimiento de las distintas ramas de la matemática (álgebra, geometría, estadística, etc.); los matemáticos más destacados, en la historia de la matemática; la evolución y resolución de determinados problemas matemáticos, entre otros.

En relación con la temática de este documento Luis PUIG (1997), en su artículo *Análisis Fenomenológico*, expresa que:

"El álgebra moderna organiza fonemas que tienen que ver con las propiedades estructurales de conjuntos de objetos arbitrarios en los que hay definidas operaciones. Esas propiedades y esos objetos provienen de la objetivación de medios de organización de otros fenómenos de nivel más bajo y son el producto de una larga historia con sucesivos ascensos de nivel. Una manera de recorrer la historia consiste en situarse en el siglo IX en el momento en que al-Khwarizmi escribe el libro conciso de al-jabr y almuqabala y tomar ese acontecimiento como nacimiento del álgebra en tanto disciplina claramente identificada entre las matemáticas".([13])

c) Breve historia del álgebra

Remontarse, a la historia del álgebra implica remontarse al concepto de número. Éste era percibido en la antigüedad como una propiedad inseparable de una colección de

[13] PUIG, Luis, (1997); Análisis fenomenológico, en *La Educación matemática en la enseñanza secundaria.* ICE. Universidad de Barcelona. Rico y otros (Coord.). Editorial Norsori. pág. 87.

objetos. Más tarde aparecen las operaciones entre números, y problemas cada vez más complejos.

Antes de la aparición de los símbolos de los números y las fórmulas, todo era expresado con palabras. El período comprendido entre 1700 a. de C. y 1700 d. de C. se caracterizó por la invención de los símbolos y la resolución de ecuaciones.

Los egipcios dejaron muchos problemas de tipo aritmético referidos a la vida diaria, en papiros como los de Rhind (1600 a. de C.) y Moscú (1800 a. de C.), como también algunos de tipo algebraico que no se referían a objetos concretos. Ecuaciones del tipo $x + ax = b$, ó $x + ax + bx = 0$, eran resueltas por los egipcios por el método de la falsa posición o "regula falsi". ([14])

Los babilonios trabajaron principalmente en sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones de segundo grado. La necesidad de resolver problemas prácticos relacionados con la agrimensura y el comercio los llevó a desarrollar métodos para medir y contar. En las tablillas babilónicas se encontraron tablas de raíces cuadradas, cúbicas, enunciados, soluciones de problemas algebraicos, algunos de los cuales equivalen a ecuaciones cuadráticas.

La mayor cantidad de **documentos de los babilonios corresponde al período 600 a. de C.- 300 d. de C**. En ellos se encontraron soluciones aproximadas de ecuaciones determinadas usando fórmulas del tipo.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{Y} \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Aunque, los griegos se dedicaron más a la geometría, hay interesantes aportes de parte de algunos de ellos, como Pitágoras, Euclides, a conceptos algebraicos.

[14] Este método consiste en tomar un valor concreto para la incógnita, probar con él y si se verifica la igualdad ya se tiene la solución, si no, mediante reiterados cálculos se obtiene la solución exacta (Socas, p.46).

Con Pitágoras (~ 580 – 520 a. C.) se concibe, el primer proyecto de matematizar fenómenos naturales. Los pitagóricos crearon un método de cálculo geométrico general conocido como *álgebra geométrica*, como vía alternativa para la extensión del dominio numérico de los números racionales. La imposibilidad de expresar la diagonal del cuadrado como múltiplo de sus lados, los indujo a pensar que hay más segmentos que números. ([15]) (PIJEIRA Cabrera, s. f.).

La suma de números era expresada como adición de segmentos y la multiplicación como área de rectángulos de lados a y b, en tanto que la resolución de ecuaciones cuadráticas, fue vista como problema de anexar áreas y las identidades algebraicas como conjunto de posiciones geométricas.

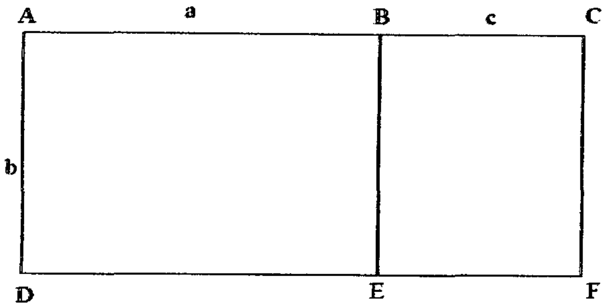
En el libro II de *los elementos* de Euclides (300 a. de C.) hay 14 proposiciones para resolver problemas algebraicos, con métodos geométricos y los griegos resolvían ecuaciones cuadráticas por medio de los procedimientos conocidos como de "aplicación de áreas", basándose en las mismas (SOCAS ROBAINA y otros, 1989).

Por ejemplo, es posible probar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma a partir de la Proposición 1 de los elementos que expresa:

"Si tenemos dos líneas rectas y cortamos una de ellas en un número cualquiera de segmentos, entonces el rectángulo contenido por las dos líneas rectas es igual a los rectángulos contenidos por la línea recta, que no fue cortada y cada uno de los segmentos anteriores". ([16])

[15] PIJEIRA CABRERA, Héctor E.; *Matemáticas: La Época Dorada (600 a.C. – 415 d. C.). El Aporte Científico y Metodológico de los Sabios de la Grecia Antigua.* Departamento de Matemáticas. Universidad de Matanzas, Cuba, pág. 135.

[16] SOCAS, Robaina y otros (1980). *Iniciación al álgebra.* Madrid. Editorial Síntesis. 1989. pág. 42.



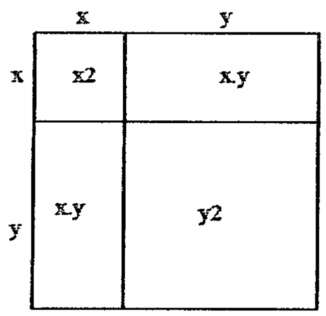
AD . AC = AD . AB + AD . BC

b . (a + c) = b . a + b . c

En tanto, la proposición 4 nos permite verificar la expresión

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

"Si una línea recta se corta de una manera arbitraria, entonces el cuadrado construido sobre el total, es igual a los cuadrados sobre los dos segmentos y dos veces el rectángulo contenido por ambos segmentos."



$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

Diofanto de Alejandría (200-284) perfeccionó el aparato aritmético algebraico. Hasta el siglo III las operaciones se describían con palabras. *Él hizo evolucionar el álgebra expresada en lenguaje común, conocida como retórica, hacia un álgebra sincopada, utilizando palabras y símbolos, respetando las reglas de la sintaxis gramatical.* Se aproximaba así, a nuestros actuales símbolos algebraicos. ([17])

No aparece en el texto principal de este autor, la *aritmética,* relación entre el trabajo algebraico y la geometría griega.

[17] El álgebra moderna es totalmente simbólica con una sintaxis propia, distinta de la construcción gramatical lingüística.

El conocimiento algebraico en Arabia comienza en la segunda mitad del siglo IX a partir de la obra de al-Khuwarizmi (790-850), mientras que en Europa el inicio de este conocimiento se remonta al siglo XII.

Al-Khwarizmi, siendo alumno de la Casa de la Sabiduría de Bagdag, realizó tareas que incluían la traducción de manuscritos científicos griegos y estudios sobre álgebra, geometría y astronomía. Escribió un texto sobre álgebra y un tratado sobre astronomía. El tratado de álgebra *Hisab al-jabr w'al-muqabala,* fue el más famoso e importante de todos los trabajos de al-Khwarizmi. Es el título de esta obra, el que nos ha dado la palabra "álgebra" y se a considera el primer libro escrito sobre esta rama de la matemática.

Al describir el propósito de su libro dice que intentó enseñar "... *lo que es más fácil y útil en aritmética, tal como los hombres necesitan constantemente en casos de herencias, repartos, pleitos y comercio y todos los tratos entre ellos, ó donde se necesita la medida de tierras, la excavación de canales, cálculos geométricos y otros objetos de varios tipos*". ([18])

Al-Khwarizmi, en su libro de álgebra intentaba ser sobre todo práctico; el álgebra era introducida para resolver problemas de la vida real, que eran parte del día a día en el imperio islámico de ese tiempo. En realidad, sólo la primera parte del libro es una discusión de lo que hoy reconoceríamos como álgebra. En ésta se presentan los números naturales, estableciendo "todos los tipos de números que son necesarios para los cálculos", tesoros (cuadrados), raíces y simples números (dírhams).

[18] F Rosen (trs.), Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi: *Algebra* (London, 1831). Tomado del artículo *Biografía de Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi,* de J. J. O' Connor y E. F. Robertson. Traductor: José Manuel García Estevez. MacTutor History of Mathematics Archive. Pág. 2.

A continuación establece todas las combinaciones posibles de esos tipos de números, y un algoritmo para resolver cada uno de los tipos y hallar su tesoro (raíz). Cualquier problema podía ser reducido, por medio de su traducción, en términos de cuadrados, raíces y números.

Estas combinaciones dan lugar a ecuaciones lineales ó cuadráticas. Estas ecuaciones están compuestas, entonces, por números, raíces (x) y cuadrados (x^2). **Vale aclarar** que una particularidad de las matemáticas de al-Khwarizmi, era que no utilizaba símbolos; estaba expresada totalmente con palabras.

Las combinaciones con los tres tipos de números las reducía a una de las seis formas o modelos estándar siguientes:

1) Cuadrados igual a raíces $Ax^2 = Bx$

2) Cuadrados igual a números $Ax^2 = C$

3) Raíces igual a números $Ax = C$

4) Cuadrados y raíces iguales a números $x^2 + Bx = C$

5) Cuadrados y números iguales a raíces $x^2 + C = Bx$

6) Raíces y números iguales a cuadrados $Bx + C = x^2$

Para nosotros estos seis modelos, no son sino casos particulares de la misma ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$ Pero hay que tener en cuenta que, dado que en la antigüedad era grande el prejuicio, frente a los números negativos, al-Khwarizmi evita este tipo de números, considerando sólo las **soluciones positivas** de las ecuaciones cuadráticas.

La reducción a las formas mencionadas se hace usando las dos operaciones de *al-jabr* y *al-muqabala*. Aquí, 'al-jabr' significa 'completar' y es el proceso de eliminar términos negativos de una ecuación. En uno de los ejemplos del propio al-Khwarizmi, la operación 'al-jabr' transforma.

$$x^2 = 40x - 4x^2 \text{ en } 5x^2 = 40x$$

El término 'al-muqabala' significa 'equilibrar' y es el proceso de reducir los términos positivos de la misma potencia cuando se dan a ambos lados de una ecuación. Por ejemplo, dos aplicaciones de 'al-muqabala' reducen

$$50+3x+x^2=29+10x \text{ a } 21+x^2=7x.$$

Aplicándose primero a números y luego a raíces.

A partir de estas operaciones AL-KHWARIZMI demostró cómo resolver los seis tipos de ecuaciones. Para esto usó métodos de solución tanto algebraicos como geométricos. Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2+10x=39$ escribe:

"...un cuadrado y 10 raíces son igual a 39 unidades. La cuestión, por tanto, en este tipo de ecuación, es la que sigue: ¿cuál es el cuadrado que combinado con diez de sus raíces dará una suma total de 39? La manera de resolver este tipo de ecuación es tomar una mitad de las raíces mencionadas. Las raíces en el problema que vimos eran 10. Por tanto tomamos 5, que multiplicado por sí mismo da 25, una cantidad a la que sumamos 39, dando 64. Habiendo tomado después la raíz cuadrada de éste, que es 8, le restamos la mitad de las raíces, 5, quedando 3. El número tres por tanto representa una raíz de este cuadrado, que él mismo es, naturalmente, 9. Nueve por tanto da el cuadrado". ([19])

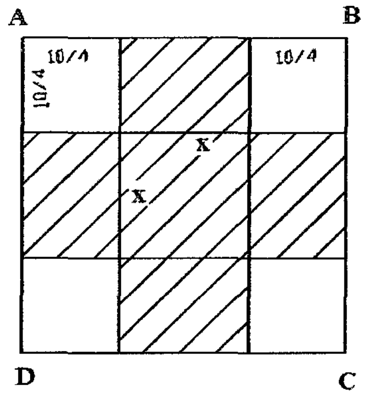
La prueba geométrica utilizada por al-Khwarizmi consistía en el completamiento del cuadrado.

Comienza con un cuadrado de lado x, que representa x^2. A este cuadrado, le suma el equivalente a un rectángulo 10.x y lo hace sumando cuatro rectángulos, cada uno de una anchura de 10/4 y longitud x. La zona rayada tiene un área de x^2 + 4. (10/4.x), que es igual a 39. Ahora completamos el cuadrado sumando los cuatro pequeños

[19] F. Rosen (trs.). Muhammad ibn Musa AL-KHWARIZMI: Algebra (London, 1831).

cuadrados, cada uno de un área de 5/2 × 5/2 = 25/4. De aquí que el cuadrado exterior tiene un área de 4× 25/4 + 39 = 25 + 39 = 64. El lado del cuadrado es por tanto 8.

Pero el lado tiene una longitud de 5/2 + x + 5/2, o sea, x + 5 = 8, resultando que x = 3.



Pareciera que al usar soluciones geométricas al-Khwarizmi estaba familiarizado con la geometría griega. Se supone que pudo haberlo estado ya que siendo joven, su compañero al-Hajjaj, de la Casa de la Sabiduría, había traducido los Elementos de Euclides al árabe.

Aunque no hay mayores indicios del conocimiento de al-Khwarizmi sobre la obra de Diofanto, se considera al *Álgebra*, como la transición entre los trabajos de Diofanto y los de matemáticos italianos del renacimiento como Nicolás de Cusa, Regiomontano y Luca Pacioli, entre otros.

d) Las seis formas de ecuaciones (lineales y cuadráticas) de al-Khwarizmi

El método geométrico de al-Khwarizmi para resolver ecuaciones cuadráticas consiste, en considerar que tanto la variable, como la constante son lados de rectángulos. La multiplicación de variable por variable, variable por número o número por número, es considerada como un área. Para la resolución de las ecuaciones se parte de un cuadrado, anexando o restando áreas según corresponda. Es importante cómo se disponen esas áreas.

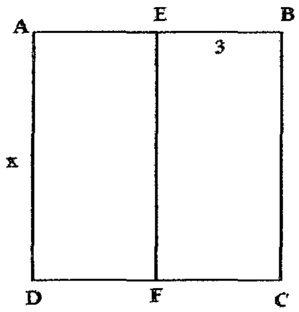
A continuación se desarrollan, las posibles soluciones de las seis formas o modelos de ecuaciones propuestas por al- Khwarizmi.

1) Cuadrados igual a raíces $Ax^2 = Bx$

Por ejemplo, sea $x^2 = 6x$

Dado que $x^2 = 6x$, se puede escribir como $x \, . \, x = 3 \, . \, x + 3 \, . \, x$. Esto asegura que el área del cuadrado puede expresarse, como la suma de las áreas de dos rectángulos iguales.

Se parte de un cuadrado de lado x y en él se consideran dos rectángulos de lados 3 y x.

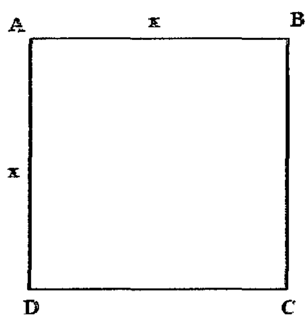


$ABCD = x^2$
$EBCF = 3.x \quad EB = 3$
$AEFD = EBCF$
$AE = 3 \quad AB = AE + EB = 6$
$X = 6$

2) Cuadrados igual a números $Ax^2 = C$

Por ejemplo, sea $x^2 = 4$

Como $x^2 = 4$ se puede expresar como $x \, . \, x = 2 \, . \, 2$, se parte de un cuadrado de lado x. El problema se reduce a encontrar el lado del cuadrado cuya área sea 4.



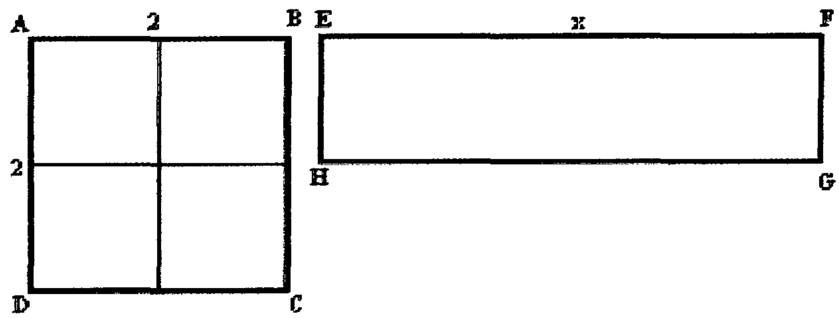
$ABCD = x^2 = 4$
$AB = x = 2$

3) Raíces igual a números $Ax = C$

Por ejemplo, sea x = 4 donde A vale 1

$x = 4$, se puede expresar como $1 \, . \, x = 2 \, . \, 2$

Una solución posible es trabajar con rectángulos equivalentes. Se parte de un cuadrado de lado 2 y sabiendo que su área debe ser igual a la de un rectángulo, con un lado igual a 1, se encuentra la medida del otro lado, tal que el área sea 4.



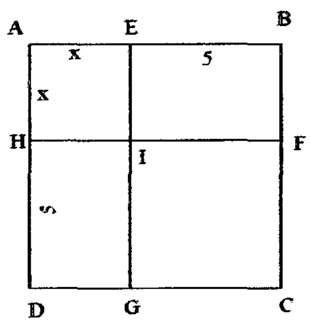
ABCD = 2. 2 = 4
EFGH = ABCD = 1. x = 4
x = 4

4) Cuadrados y raíces iguales a números $x^2 + Bx = C$

Por ejemplo, sea $x^2 + 10x = 39$

La solución dada por al- Khwarizmi de esta ecuación ya fue presentada en el apartado anterior. A continuación se presenta otra solución posible.

Dado que $x^2 + 10x = 39$ se puede expresar como x . x + 5 . x + 5 . x = 39, podemos partir de un cuadrado de lado x (AEHI) al que se anexan los rectángulos de lados 5.x (EBFI y HIGD) y se completa el cuadrado ABCD.



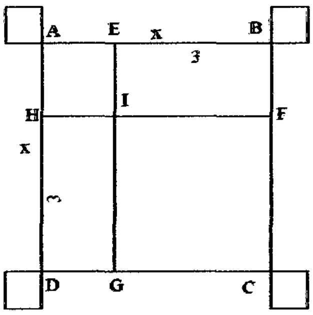
AEHI = x. x
EBFI = HIGD = x.5
IFCG = 5.5 = 25
$x^2 + 10x =$ ABCD – 25 = 39
ABCD = 64
AB = x + 5 = 8
x = 3

5) Cuadrados y números iguales a raíces $x^2 + C = Bx$

$x^2 + 5 = 6x$, se puede expresar como x . x + 4 . 5/4 = 3 . x + 3 . x

Se parte de un cuadrado de lado x (ABCD) y se consideran los rectángulos de lados 3 y x (EBCG y HFCD) que se interceptan en un cuadrado de área 3.3 dado que IF = IG = 3

Se anexan entonces, cuatro cuadrados de área 5/4.



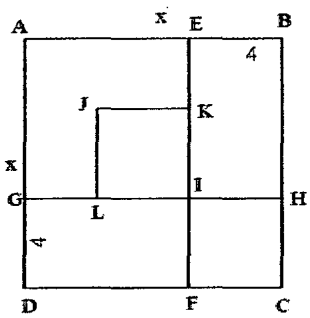
$ABCD = x^2$
$EBCG = HFCD = 3.x$
$IFCG = 3.3 = 9$
$AEIH + 4.\ 5/4 = 9$
$AEIH = 4$
$AE = 2$
$AB = x = AE + EB = 2 + 3$
$x = 5$

6) Raíces y números iguales a cuadrados $Bx + C = x^2$

Por ejemplo, sea $8x + 20 = x^2$

$8x + 20 = x^2$, se puede expresar como $x\ .\ x = 4\ .\ x + 4\ .\ x + 20$.

Se parte de un cuadrado de lado x (ABCD) y se consideran los rectángulos de lados 4 y x (EBCF y GHCD).



$ABCD = x^2$
$EBCF = GHCD = 4.x$
$IHCF = JKIL = 4.4$
$DGLJKI = 4.\ x$
$ABCD = EBFC + GIDF + JKIL + AEKJLG$
$AEIG = JKIL + AEKJLG = 20 + 16 = 36$
$AE = AG = 6$
$x = AE + EB = 6 + 4 = 10$

GANDZ (1932) da esta opinión del álgebra de Al-Khwarizmi:

"El álgebra de al-Khwarizmi es reconocida como el ***fundamento y la piedra angular de las ciencias****. En cierto sentido, al-Khwarizmi debería ser llamado 'el padre del álgebra', y no Diofanto, porque al-Khwarizmi es el primero en enseñar álgebra de*

una manera elemental y por sí misma. Diofanto está preocupado más que nada con la teoría de los números". ([20])

Esto nos lleva a reflexionar si como docentes, conociendo las dificultades de nuestros alumnos para el tratamiento de identidades y ecuaciones algebraicas, no sería bueno comenzar su enseñanza de una "manera elemental", al modo de al-Khwarizmi, con los aportes que hasta aquí mencionamos, desarrollando la posibilidad de un trabajo simultáneo en dos marcos, geométrico y algebraico, e incorporando el modelo de área, bajo distintas representaciones. Sabemos que la modelización material y gráfica tiene sus limitaciones, pero justamente resulta interesante que los mismos alumnos, las descubran y reconozcan la potencialidad del lenguaje del álgebra para sortearlas.

2.4. MATERIAL DIDÁCTICO ALGEPLANO

Según MED del Perú (2006), "*el algeplano, es un material manipulativo que se utiliza en la enseñanza - aprendizaje como representación geométrica de expresión algebraica, ecuaciones cuadráticas, de trinomios de términos positivos de segundo grado que son cuadrados perfectos*". ([21])

De igual modo J.J. LARRUBIA (2004) al material didáctico algeplano denomina con el término material didáctico puzzle algebraico y define que.

"es una colección de piezas con la que se puede representar geométricamente una expresión algebraica de segundo grado. Está inspirado en una versión simplificada (compuesta por placas, tiras y unidades) de los Bloques Multibase de Dienes, ***utilizada por Bruner y el propio Dienes en 1963, para la construcción de cuadrados,***

[20] S. GANDZ (ed.), The geometry of al-Khwarizmi (Berlin, 1932). Tomado del artículo *Biografía de Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi,* de J. J. O' Connor y E. F. Robertson. Traductor: José Manuel García Estevez. MacTutor History of Mathematics Archive. Pág.4.

[21] MINISTERIO DE EDUCACIÓN DEL PERÚ (2006). *Guía, Uso y conservación de Algeplanos* Pág. 5,6.

como representación geométrica de trinomios de términos positivos de segundo grado que son cuadrados perfectos, en el contexto de una investigación con escolares sobre etapas de desarrollo cognitivo". ([22])

El material didáctico algeplano es una versión ampliada y original, en cuanto a la metodología de combinación de las piezas, en las ecuaciones de segundo grado, trinomios que pueden representarse, y su campo de aplicación a la resolución de todo tipo de ecuaciones de segundo grado, del modelo de Dienes y de otros modelos también inspirados en la versión simplificada de los Bloques Multibase, denominados ***algebra tiles***([23]) (utilizados en Estados Unidos) y orientados entre otras aplicaciones (como son el producto de monomios y de binomios, el cuadrado de un binomio de 1er grado, etc.) a la factorización de trinomios de segundo grado.

2.4.1. Descripción del material didáctico algeplano.

Nominamos algeplanos a una colección de piezas de figuras geométricas planas, formada por cuadrados y rectángulos que representan:

- El cuadrado de área 1, de dimensiones 1 por 1, denominado cuadrado pequeño amarrillo (positivo).
- El rectángulo de área x, de dimensiones 1 por x, denominado rectángulo verde (positivo).
- El cuadrado de área x^2, de dimensiones x por x, denominado cuadrado grande azul (positivo).

[22] LARRUBIA, J.J. (2004). *Resolución de ecuaciones de segundo grado con puzle algebraico (guía del docente)*, Archidona, Málaga- España.
[23] LEITZE, A. R. y KITT, N. A. (2000). *Using homemade Algebra Tiles to develop Algebra and Prealgebra conceps. Mathematics Teacher*, Vol. 93 issue 6, september 2000, Pag. 462,463.

Cuadrado de área 1	Rectángulo de área X	Cuadrado de área X^2
1 1 1 **Cuadrado pequeño amarillo (positivo)**	X 1 X **Rectángulo verde (positivo)**	X^2 X X **Cuadrado grande azul (positivo)**

Fuente: Cuadro extraída de la guía de algeplanos (elaborado por MED-Perú)

En consecuencia, sí queremos representar cualquier trinomio de segundo grado (con términos positivos y/o negativos), debemos completar la colección inicial con las versiones negativas de las piezas anteriores.

Cuadrado de área -1	Rectángulo de área –X	Cuadrado de área $-X^2$
-1 -1 1 **Cuadrado pequeño rojo (negativo)**	-X -1 X **Rectángulo rojo (negativo)**	$-X^2$ -X X **Cuadrado grande rojo (negativo)**

Fuente: Cuadro extraída de la guía de algeplanos (elaborado por MED-Perú)

A pesar de que las áreas y las medidas de los lados de los rectángulos, no pueden ser negativas, en la representación desarrollada, las piezas negativas, representan figuras con área negativa puesto que uno de sus lados es negativo.

2.4.2. Uso del material didáctico algeplano

El uso del material didáctico está orientado a la representación geométrica de ecuaciones cuadráticas, de una variable y con coeficientes enteros. Las operaciones básicas como la adición, sustracción, multiplicación y división e incluye la factorización de trinomios, se pueden realizar aplicando agrupaciones y organizando secuencias concretas con las fichas, teniendo en cuenta su color, forma y símbolo asignado.

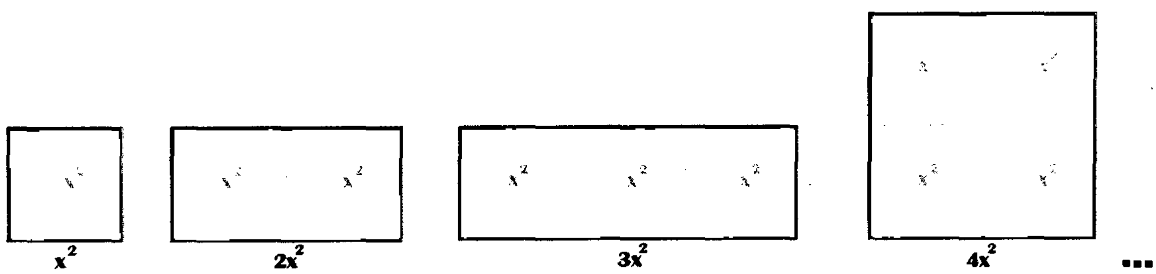
Para los estudiantes que siempre han presentado directamente las variables en forma simbólica y literal, podría parecerles novedoso crear expresiones y operaciones algebraicas usando, piezas de figuras geométricas como las del algeplano. Por otro lado, para estudiantes que recién se inician en la representación de ecuaciones cuadráticas y en las operaciones de términos algebraicos, constituirá un "proceso natural" de aprendizaje, que parte de lo concreto y lo transporta al mundo abstracto del lenguaje algebraico.

2.4.3. Representación geométrica de los términos de una ecuación cuadrática con algeplano

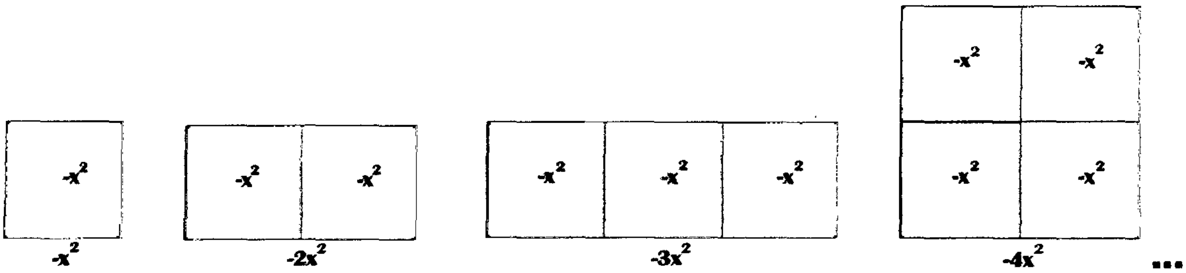
Toda expresión de 2° grado en forma general completa ($ax^2 + bx + c$) o incompleta ($ax^2 + bx$ **o** $ax^2 + c$) puede ser representada geométricamente por un conjunto de piezas del algeplano.

Esta representación geométrica se realiza término a término.

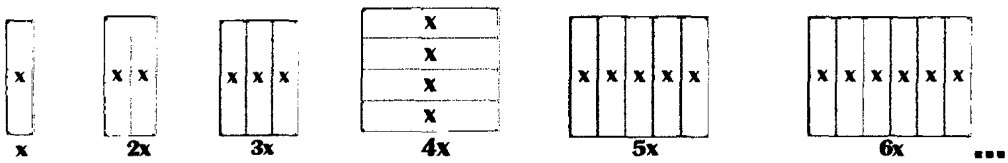
1. ***<u>El término cuadrático positivo</u>.***- Se representa mediante uno o conjunto de cuadrados grandes azules, cuando ax^2 es positivo.



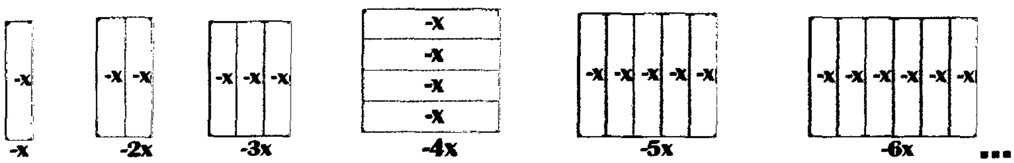
2. ***El término cuadrático negativo***.- Se representa mediante uno o conjunto de cuadrados grandes rojos, cuando ax^2 es negativo.



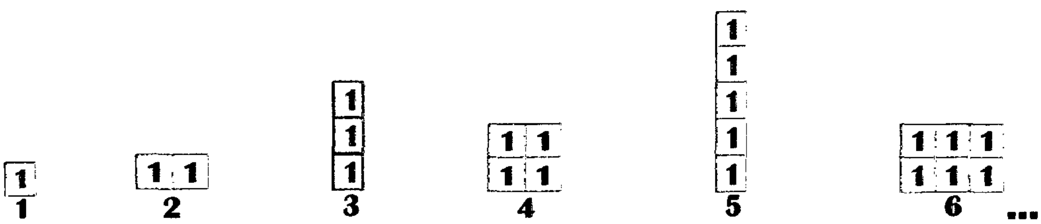
3. ***El término lineal positivo***.- Se representa mediante uno o conjunto de rectángulos verdes, cuando bx es positivo.



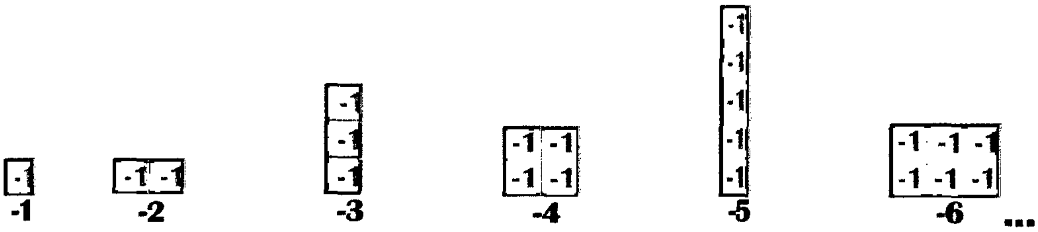
4. ***El término lineal negativo***.- Se representa mediante uno o conjunto de rectángulos rojos, cuando bx es negativo.



5. ***El término independiente positivo***.- Se representa mediante una unidad o conjunto de unidades amarillos, cuando el término independiente c es positivo.



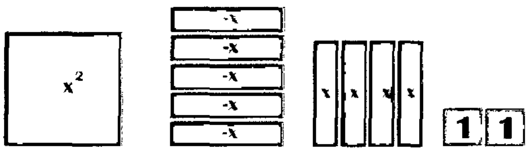
6. ***El término independiente negativo***.- Se representa mediante una unidad o conjunto de unidades rojas, cuando el término independiente c es negativo.



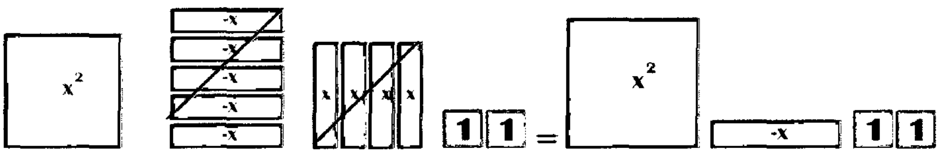
2.4.4. Agrupación y reducción de expresiones algebraicas con algeplanos

La combinación, de dos grupos de rectángulos y cuadrados de colores diferentes se anulan por ejemplo.

Dada las siguientes piezas del algeplano, agrupa y reduce a una expresión algebraica más simple.



<u>**Solución**</u>



Esto significa la expresión algebraica $x^2 - 5x + 4x + 2$ a sido reducida a $x^2 - 1x + 2$ no olvidar *"pares de valores opuestos se anulan"*.

2.4.5. Construcción de rectángulos y cuadrados con algeplanos para obtener ecuaciones cuadráticas equivalentes más simples

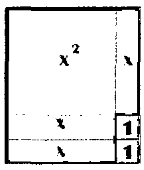
A partir de las piezas de los algeplanos, que representa una ecuación cuadrática, podemos construir rectángulos y/o cuadrados. El cálculo del área de estas figuras nos permitirá obtener, expresiones más sencillas (en forma factorizada o en forma de binomio al cuadrado) equivalentes a la expresión general de 2° grado inicial representada.

Pasos para obtener una ecuación cuadrática equivalente a x^2+3x+2 en forma factorizada, a partir de una construcción de cuadrados y rectángulos, con las piezas algeplanos.

<u>Primero.-</u> Se selecciona las piezas del algeplano que representan la expresión x^2+3x+2.

(Figura N° 01)

<u>Segundo.-</u> Se construye un rectángulo o cuadrado usando las piezas del algeplano.



(Figura N° 02)

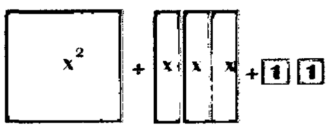
<u>Tercero.-</u> Se calcula el área de las figuras N° 01 y N° 02 mediante dos formas diferentes:

a) Cálculo de área a partir de sus componentes.

Área de un cuadrado o rectángulo, es igual a la suma de las áreas de los pedazos que lo forman.

Entonces:

Área $_{\text{Rectángulo}}$ = Suma de las áreas de los pedazos que lo conforman.



Área $_{\text{Rectángulo}}$= $x^2+x+x+x+1+1$

Agrupando términos se obtiene:

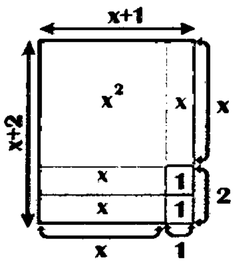
Área $_{\text{Rectángulo}}$= x^2+3x+2

b) Cálculo de área a partir de sus dimensiones.

Área del rectángulo es el producto de las dimensiones de su base por su altura.

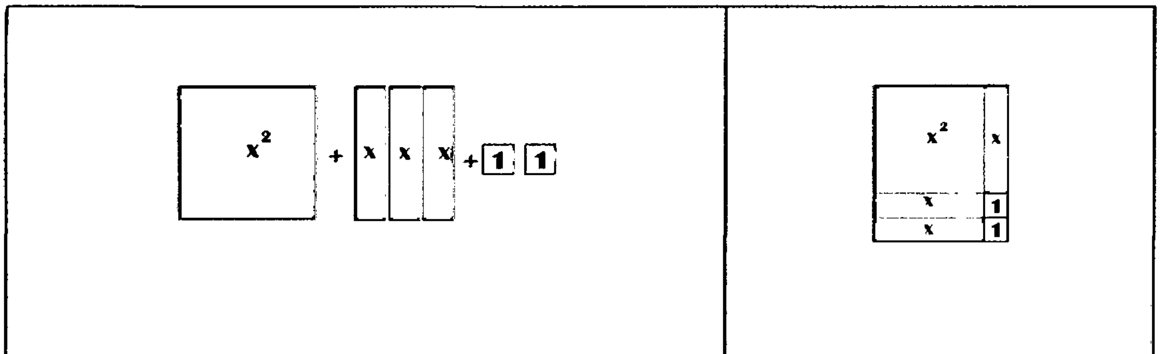
$$\boxed{\textbf{Área}_{\text{Rectángulo}} = \textbf{Base x Altura}}$$

Entonces:



Área $_{\text{Rectángulo}} = (x+2)(x+1)$

Por lo tanto observando las dos formas **a) y b),** se comprueba que las áreas de las dos figuras, son iguales y también se logró una expresión equivalente más sencilla, en forma factorizada, mediante la construcción de cuadrados y/o rectángulos:



$$\therefore \quad x^2+3x+2 \quad = \quad (x+2)(x+1)$$

2.4.6. Construcción de rectángulos y cuadrados con algeplanos: características y condiciones.

Según LARRUBIA, J.J. (2004). Indica, "*la construcción de rectángulos y cuadrados sirve para obtener expresiones equivalentes más sencillas de ecuaciones cuadráticas en forma general.*

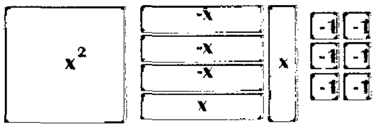
Estas construcciones no son únicas, un mismo conjunto de piezas puede combinarse de diferentes formas, dando lugar a rectángulos y/o cuadrados distintos.

Pero no todos los rectángulos o cuadrados que pueden construirse son válidos, sólo algunos de ellos nos permiten obtener expresiones equivalentes más sencillas.

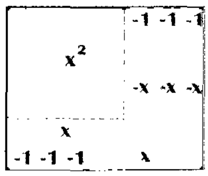
En consecuencia, será necesario establecer condiciones y reglas que nos faciliten la construcción de rectángulos y cuadrados válidos". ([24])

Dada las siguientes piezas del algeplano que representa la ecuación cuadrática:

$$x^2 - x - 6 = 0$$



Un posible rectángulo que se podría construir con esta colección de piezas, sería la siguiente forma.



En este rectángulo es imposible determinar las dimensiones **(medidas de la base y de la altura).**

Debido a la combinación de piezas realizada, las medidas de los lados paralelos son distintas cuando deberían ser iguales.

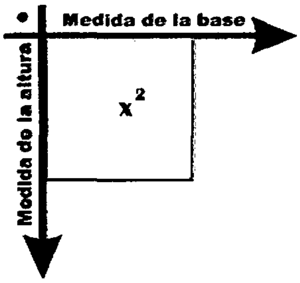
Por tanto, no es posible calcular el área a partir de sus dimensiones y en consecuencia: no es posible obtener una expresión equivalente.

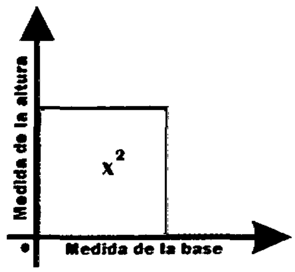
[24] LARRUBIA, J.J. (2004). *Resolución de ecuaciones de segundo grado con puzle algebraico (guía del docente)*. Archidona, Málaga- España.

2.4.7. Reglas para la construcción de rectángulos y cuadrados con los algeplanos

En la construcción de rectángulos o cuadrados, debemos tener mucho cuidado, para evitar errores en la determinación de las dimensiones, para ello tenemos realizado las siguientes reglas.

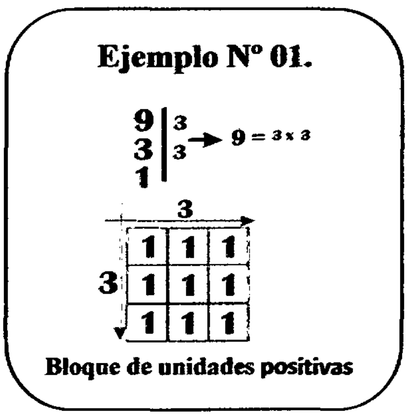
<u>**Primera regla.**</u> El término cuadrático (x^2) o (**cuadrados grandes de color azul o rojo**), tienen que estar ubicados en una de las esquinas ya sea en la parte superior o inferior, como se muestra en las siguientes figuras.

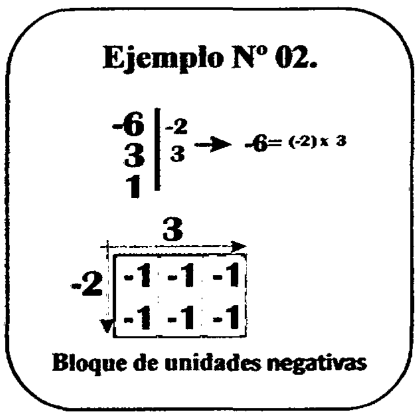




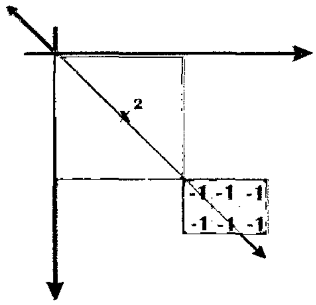
<u>**Segunda regla.-**</u> Los términos independientes (c) o (cuadrados pequeños de color amarillo o rojo), tienen que estar agrupados en un único bloque, formando un

: Para armar las dimensiones de los bloques de las unidades tenemos que extraer sus factores al término independiente.





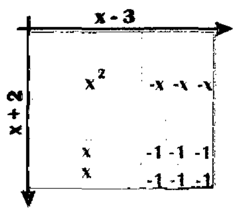
<u>**Tercera regla.-**</u> La pieza x^2 y los bloques de las unidades, tienen que estar situadas en diagonal, como muestra la figura.



Cuarta regla.- Los términos lineales (bx) o (rectángulos de color verde y rojo), no pueden estar mezclados en un solo bloque. Cada color tiene que formar su propio bloque en forma vertical u horizontal.

Forma horizontal **forma vertical**

Quinta regla.- Se construye un rectángulo o cuadrado, combinamos las reglas 3 y 4, como muestra la siguiente figura.



Por tanto queda $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$

2.5. ENSEÑANZA - APRENDIZAJE

La enseñanza-aprendizaje constituye una unidad y son elementos indesligables en todo acto educativo para la plasmación, de una educación acorde a sus fines y orientaciones, sustentadas en objetivos y programas, contenidos y métodos.

Según FERRÁNDEZ (1979), "*el aprendizaje es el correlativo lógico de la enseñanza, tarea que corresponde al docente y supone un cambio en la disposición o capacidad humana, con carácter de relativa permanencia, y que no es atribuible simplemente al* *proceso de desarrollo. Sólo en el plano teórico se pueden superarse ambos procesos: enseñanza y aprendizaje. Los dos vienen a significar las fases de la instrucción*". ([25])

En todo proceso de enseñanza-aprendizaje, los trabajos didácticos y las actividades de aprendizajes sistematizados se convierten en modos, formas, medios, procedimientos y métodos que llevan al logro de aprendizaje; convirtiéndose en experiencias de aprendizaje significativos y satisfacen los objetivos y contenidos programáticos, congruentes con: los objetivos propuestos, el nivel de madurez de los alumnos, los intereses del grupo y, la necesidad de promover nuevos aprendizajes.

2.5.1. La enseñanza

La enseñanza es el acto de dirigir la transferencia de conocimientos con técnicas y procedimientos apropiados durante el proceso de aprendizaje de los alumnos, que suministra conocimientos y asume funciones de:

- Cuidar los aspectos formativos, que es lo esencial en el desenvolvimiento de la persona humana.
- El alumno debe participar en forma activa en sus acciones y reacciones, y al mismo tiempo la enseñanza debe adaptarse al interés y a las condiciones psíquicas del educando.
- Dirigir a los alumnos hacia el conocimiento de la realidad a través del análisis consciente de los diversos problemas que se suscitan.
- No descuidar el aspecto social del alumno, haciendo del lugar de estudios el sitio del encuentro personal y humano.

Según la (UNESCO, 1994). La enseñanza debe adecuarse de modo que cada alumno pueda aprender significativamente, individualmente o en grupo, situación que se

[25] FERRÁNDEZ, A. (1979). *La Educación Constantes y Problemas Actual.* Barcelona: SEAC. Pág. 29.

produce con frecuencia; ello exige cierto grado de vivacidad y numerosas competencias particulares, para que el proceso constructivo del alumno resulte eficaz.

DE GUZMÁN (1993), indica. "*Para que el aprendizaje sea efectivo, es necesario que los conocimientos impartidos encajen a las características individuales del alumno, teniendo en cuenta sus esquemas previos de conocimiento, para modificar esos esquemas en la dirección adecuada. Por ello, en todo el proceso de enseñanza es preciso planificar con antelación: los instrumentos, la organización del aula, agrupamientos, elección y secuenciación de contenidos, etc.*". ([26])

2.5.2. El aprendizaje

El aprendizaje es un proceso constructivo que implica "buscar significados", así que los estudiantes recurren de manera rutinaria al conocimiento previo para dar sentido a lo que están aprendiendo.

FELDMAN, R.S. (2005). Dice al respecto, *"el aprendizaje es el proceso a través del cual se adquieren nuevas habilidades, destrezas, conocimientos, conductas o valores como resultado del estudio, la experiencia, la instrucción, el razonamiento y la observación. Este proceso puede ser analizado desde distintas perspectivas, por lo que existen distintas teorías del aprendizaje"*. ([27])

Podemos definir el aprendizaje como un proceso de cambio relativamente permanente en el comportamiento de una persona generado por la experiencia.

Proceso de aprendizaje

El proceso de aprendizaje es una actividad individual que se desarrolla en un contexto social y cultural. Es el resultado de procesos cognitivos individuales mediante los

---

[26] DE GUZMAN, M. & GIL, D. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones*. Madrid: Editorial popular, S.A.

[27] FELDMAN, R.S. (2005). Psicología: con aplicaciones en países de habla hispana. (Sexta Edición) México, MC-Grill Hill

cuales se asimilan e interiorizan nuevas informaciones (hechos, conceptos, procedimientos, valores), se construyen nuevas representaciones mentales significativas y funcionales (conocimientos), que luego se pueden aplicar en situaciones diferentes a los contextos donde se aprendieron. Aprender no solamente consiste en memorizar información, es necesario también otras operaciones cognitivas que implican: conocer, comprender, aplicar, analizar, sintetizar y valorar. En cualquier caso, el aprendizaje siempre conlleva un cambio en la estructura física del cerebro y con ello de su organización funcional.

GONZÁLEZ, D. (2008), indica para aprender necesitamos de cuatro factores fundamentales ([28]): inteligencia, conocimientos previos, experiencia y motivación.

- A pesar de que todos los factores son importantes, debemos señalar que sin **motivación** cualquier acción que realicemos, no será completamente satisfactoria. Cuando se habla de aprendizaje la motivación es el «querer aprender», resulta fundamental que el estudiante tenga el deseo de aprender. Aunque la motivación se encuentra limitada por la personalidad y fuerza de voluntad de cada persona.

- La **experiencia** es el «saber aprender», ya que el aprendizaje requiere determinadas técnicas básicas tales como: técnicas de comprensión (vocabulario), conceptuales (organizar, seleccionar, etc.), repetitivas (recitar, copiar, etc.) y exploratorias (experimentación). Es necesario una buena organización y planificación para lograr los objetivos.

- Por último, nos queda la **inteligencia y los conocimientos previos**, que al mismo tiempo se relacionan con la experiencia. Con respecto al primero, decimos que para

[28] GONZÁLEZ, D. (2008). Didáctica o dirección del aprendizaje. Bogotá. Cooperativa Editorial Magisterio

poder aprender, el individuo debe estar en condiciones de hacerlo, es decir, tiene que disponer de las capacidades cognitivas para construir los nuevos conocimientos.

2.5.3. El constructivismo

Es un enfoque que sostiene que el individuo tanto en los aspectos cognoscitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos no es un mero producto del ambiente, ni un simple resultado de sus disposiciones internas, si no una construcción propia que se va produciendo día a día, como resultado de la interacción entre estos dos factores. El conocimiento no es propia de la realidad, sino una construcción del ser humano, que se realiza con los esquemas que ya posee, con lo que ya construyó en su medio que la rodea.

RAGNI, V indica que "*el conocimiento, no es el resultado de una copia de la realidad preexistente, si no que sucede de un proceso dinámico, que interactúa con la información, para adquirir una interpretación o reinterpretación mental. Tal vez sea, este el modo que se explica el significado que adquirimos de cierta información que conocemos y que según nuestros propios procesos de análisis y nuestra capacidad para cambiar esquemas nos "ayude" a adquirir nuevos conocimientos y adaptarlos a la realidad preexistente*". ([29])

Según Mario CARRETERO citado por DÍAZ, F. y BARRIGA, A. (2002), argumenta sobre el constructivismo lo siguiente:

"*básicamente puede decirse que es la idea que mantiene el individuo tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino*

---

[29] RAGNI, V. Marcela. *El enfoque constructivista de los procesos de enseñanza y aprendizaje.* Extraído el 10 de enero 2009, de http://www.monografias.com/trabajos69/enfoque-constructivista-procesos-ensenanza aprendizaje/enfoque-constructivista-procesos-ensenanza-aprendizaje2.shtml.

una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia fiel de la realidad, sino una construcción del ser humano. ¿Con qué instrumentos realiza la persona dicha construcción? Fundamentalmente con los esquemas que ya posee, es decir, con lo que ya construyó en su relación con el medio que la rodea.

Dicho proceso de construcción depende de dos aspectos fundamentales:

- *De los conocimientos previos representación que se tenga de la nueva información, o de la actividad o tarea a resolver.*
- *De la actividad externa o interna que el aprendiz realice al respecto*". ([30])

Son muchas las teorías y corrientes del pensamiento que tienen, una visión constructivista, Piaget, Vygotski, Ausbel, Gestalt, Wallon, Bruner, Dewey, Gagné, Novak. Por esto, vemos que el constructivismo se enriquece, con un conjunto de visiones epistemológicas, psicológicas, educativas y socioculturales.

En este modelo considera que la construcción del conocimiento se produce.

❖ **Para Piaget y el constructivismo genético:**

El conocimiento se construye mediante la interacción con los objetos circundantes, generándose el desarrollo individual hacia las operaciones lógicas, formales y de la inteligencia. Aprender y enseñar es trabajar con los esquemas, puede haber esquemas manipulativos y representativos, esto se ve prácticamente en que los niños aprenden nuevos esquemas y afianzan los que ya tienen, esto último está en relación con los conceptos de asimilación y acomodación, mecanismos básicos del funcionamiento de la inteligencia.

[30] DÍAZ, F. Y BARRIGA, A. (2002). *Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo*: una interpretación constructivista. México: Mc Graw Hill.

❖ **Para Vygotsky y el constructivismo social:**

El aprendizaje se realiza en interacción con otros. La premisa básica de esta interacción está dada por la siguiente expresión: detrás de cada sujeto que aprende hay un sujeto que piensa. Para ayudar al alumno debemos acercarnos a su "*zona de desarrollo próximo*", partiendo de lo que ya sabe. El ser humano es una consecuencia de su contexto. La enseñanza debe estar guiada por un énfasis constructivista en los actos del habla, el aprendizaje y maduración de los procesos psicológicos superiores como el lenguaje y sus expresiones -en tanto desarrollo de ideas que luego se internalizan- implican un intercambio compartido de aceptaciones y rechazos de las mismas, hecho que se desarrolla necesariamente en contacto con otros.

❖ **Para Ausubel y el constructivismo disciplinario**

Ninguna tendencia o teoría pedagógica cumple a cabalidad las exigencias ideales del aprendizaje por la complejidad del mismo proceso, no obstante, una selección sincrética centrada en el **aprendizaje significativo** da luz acerca de los logros y metas a cumplir por los alumnos. La teoría de Ausubel es interesante para llevar a la práctica la elaboración de modelos didácticos.

En el enfoque constructivista, tratando de juntar el cómo y el qué de la enseñanza, la idea central se resume en la siguiente frase Según Díaz Barriga:

"Enseñar a pensar y actuar sobre contenidos significativos y contextuados".

2.6. APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

Según DÍAZ BARRIGA, F. (2002), *"el aprendizaje significativo es aquel que conduce a la creación de estructuras de conocimiento mediante la relación sustantiva entre la nueva información y las ideas previas de los estudiantes".* ([31])

[31] DÍAZ, F. Y BARRIGA, A. Op.cit. Pág.46.

Este tipo de aprendizaje busca que el alumno construya su propio aprendizaje, llevándolo a la autonomía, al momento de pensar, de modo tal que desarrolle su inteligencia relacionando de manera integral lo que tiene y lo que conoce, respecto a lo que quiere aprender.

"*La teoría de aprendizaje significativo es una introducción a la psicología de aprendizaje en salón de clases, que se preocupa principalmente del problema de la enseñanza y de la adquisición y retención de estructuras de significados en el alumno. El principio básico de esta teoría, reside en la afirmación de que las ideas expresadas simbólicamente, van relacionados de manera sustancial con lo que el alumno ya sabe. Por eso, la recomendación ausubeliana se basa en averiguar primero, lo que el alumno ya sabe para proceder en consecuencia*" (Ausubel, Novak & Hannesian, 1998, p.27).

Para AUSUBEL (1990) este tipo de aprendizaje centra su atención en los conceptos y en el aprendizaje proposicional, como base sobre la que los individuos construyen sus significados propios. La teoría del "*aprendizaje significativo*" se da como contraposición al "*aprendizaje memorístico*" y, aunque sus aportaciones y terminología se consideran en muchos entornos ya antiguas, que clarifican muchos de los conceptos que normalmente se utilizan; además, sólo desde una aproximación consciente a su origen es posible entender el desarrollo y la integración que del modelo constructivista.

El aprendizaje significativo se produce cuando los nuevos conocimientos se dan o se construyen en base a lo que el alumno conoce (conocimientos previos) que sirve de base para ampliar el edificio cognitivo; y, se logra cuando la adquisición de los nuevos conocimientos encajan fácilmente en la estructura cognitiva del alumno, concatenando e integrando los conocimientos previos con los nuevos, en un entorno de permanente motivación.

2.6.1. Ventajas del aprendizaje significativo:

- Produce una retención más duradera de la información. La nueva información al ser relacionada con la anterior, es guardada en la memoria a largo plazo.
- Facilita el adquirir de nuevos conocimientos relacionados con los anteriormente adquiridos de forma significativa, ya que al estar claros en la estructura cognitiva se facilita la retención del nuevo contenido, permite explicarlos y aplicarlos.
- Es activo, pues depende de la asimilación de las actividades de aprendizaje por parte del alumno.
- Es personal, ya que la significación del aprendizaje depende de los recursos cognitivos del estudiante.

2.6.2. Tipos de aprendizaje significativo

AUSUBEL (1990) citado por MOREIRA, Marco. A (2003), *"distingue tres tipos de aprendizaje significativo y estos son: representacional, de conceptos y proposicional"*. ([32])

- **Aprendizaje de representaciones:** es cuando el niño adquiere el vocabulario. Primero aprende palabras que representan objetos reales que tienen significado para él. Sin embargo no los identifica como categorías.

- **Aprendizaje de conceptos:** el niño, a partir de experiencias concretas, comprende que la palabra "mamá" puede usarse también por otras personas refiriéndose a sus madres. También se presenta cuando los niños en edad preescolar, se someten a

[32] MOREIRA, Marco Antonio (2003). Aprendizaje Significativo: teorías y prácticas, Edición: A.MACHADO LIBROS, S.A., 2da.Ed., España – Madrid

contextos de aprendizaje por recepción o por descubrimiento y comprenden conceptos abstractos como “gobierno”, “país”, “mamífero”.

- **Aprendizaje de proposiciones:** cuando conoce el significado de los conceptos, puede formar frases que contengan dos o más conceptos en donde afirme o niegue algo. Así, un concepto nuevo es asimilado al integrarlo en su estructura cognitiva con los conocimientos previos. Esta asimilación se da en los siguientes pasos:
  - Por diferenciación progresiva: cuando el concepto nuevo se subordina a conceptos más inclusores que el alumno ya conocía.
  - Por reconciliación integradora: cuando el concepto nuevo es de mayor grado de inclusión que los conceptos que el alumno ya conocía.
  - Por combinación: cuando el concepto nuevo tiene la misma jerarquía que los conocidos.

Ausubel concibe los conocimientos previos del alumno en términos de esquemas de conocimiento, los cuales consisten en la representación que posee una persona en un momento determinado de su historia sobre una parcela de la realidad. Estos esquemas incluyen varios tipos de conocimiento sobre la realidad, como son: los hechos, sucesos, experiencias, anécdotas personales, actitudes, normas, etc.

2.6.3. Requisitos para lograr el aprendizaje significativo

1. ***Significatividad lógica del material:*** el material que presenta el maestro al estudiante debe estar organizado, para que se de una construcción de conocimientos.

2. ***Significatividad psicológica del material*:** que el alumno conecte el nuevo conocimiento con los previos y que los comprenda. También debe poseer una memoria de largo plazo, porque de lo contrario se le olvidará todo en poco tiempo.

3. ***Actitud favorable del alumno:*** ya que el aprendizaje no puede darse, si el alumno no quiere. Este es un componente de disposiciones emocionales y actitudinales, en donde el maestro sólo puede influir a través de la motivación.

2.6.4. Condiciones para que ocurra aprendizaje significativo

Según MOREIRA, Marco. A (2003), *"las condiciones para que se dé el aprendizaje significativo es que el material que va ser aprendido sea relacionado (o incorporable) a la estructura cognitiva del aprendiz, de manera no arbitraria y no literal. Material con esa característica es potencialmente significativo".* ([33])

Según DÍAZ BARRIGA, F. (2002), Para que realmente sea significativo el aprendizaje, éste debe reunir varias condiciones: la nueva información debe relacionarse de modo no arbitrario y sustancial con lo que el alumno ya sabe, de pendiendo también de las disposiciones (motivación y actitud) de éste por aprender, así como de la naturaleza de los materiales o contenidos de aprendizaje.

Lo anterior resalta la importancia qué tiene el alumno, posea ideas previas pertinentes como antecedentes necesarios para aprender, ya que sin ellas, aún cuando el material de aprendizaje esté "bien elaborado", poco será lo que el aprendiz logre.

Es decir, puede haber aprendizaje significativo de un material potencialmente significativo, pero también puede darse la situación de que el alumno aprenda por repetición debido a que no esté motivado o dispuesto a hacerlo de otra forma, porque su nivel de madurez cognitiva no le permita la comprensión de contenidos de ciertos niveles de complejidad. En este sentido resultan dos aspectos:

---

[33] MOREIRA, Marco Antonio Op. Cit. P.48.

- La necesidad que tiene el docente de comprender los procesos motivacionales y afectivos subyacentes al aprendizaje de sus alumnos, así como de disponer de algunos principios y estrategias efectivos de aplicación en clases.
- La importancia que tiene el conocimiento de los procesos de desarrollo intelectual y de las capacidades cognitivas de las diversas estas del ciclo vital de los alumnos.

Por otro lado, es imposible concebir que el alumno satisfaga tales condiciones si el docente, a su vez, no satisface condiciones similares: estar dispuesto, capacitado y motivado para enseñar significativamente, así como tener los conocimientos y experiencias previas pertinentes tanto como especialista en su materia como en su calidad de enseñanza.

2.6.5. Evaluación de la enseñanza-aprendizaje

Es un proceso permanente de valoración de la tarea educativa, sobre la base de determinados objetivos previstos con la finalidad de optimizar el proceso de enseñanza aprendizaje y poder conocer los aciertos y errores del proceso en su conjunto.

Según LLINARES (1990) "*la evaluación permite al alumno orientarse sobre cómo está estudiando y cómo va aprendiendo, le sirve para saber cuanto le falta aún y qué puntos debe repasar. Es una función orientadora, que también le servirá para ubicarse dentro del grupo, es decir, si se reconoce como parte de los estudiantes a quienes les sale todo bien, los que no hacen nada, o los que se equivocan y reparan el error. Esta posibilidad de autoevaluarse, no con el patrón del profesor, sino el de sus propios compañeros, es la prueba de autocrítica con respecto a su compromiso con el aprendizaje*". ([34])

[34] LLINARES, Salvador (1990). *Teoría y Práctica en educación matemática.* Sevilla: Ediciones ALFAR. Pág. 184.

DE GUZMÁN (1993), expresa que "*la evaluación es un instrumento eficaz y favorecedor del proceso enseñanza-aprendizaje y que permite:*

- *Impulsar el trabajo diario y comunicar seguridad en el propio esfuerzo.*
- *Dar información al profesor y a los alumnos sobre los conocimientos que se poseen, sobre las deficiencias que se hayan producido, haciendo posible la incidencia inmediata sobre las mismas y sobre los progresos realizados, en los distintos aspectos y crear expectativas positivas.*
- *Reunir un número elevado de resultados de cada alumno, reduciendo sensiblemente la aleatoriedad de una valoración única*". ([35])

Según CASANOVA (1999, p.60) citado por VÍLCHEZ, Jesús. La evaluación educativa es "*un proceso sistemático y riguroso de recogida de datos, incorporando al proceso educativo desde el comienzo, de manera que sea posible de disponer de información continua y significativa para conocer la situación, formar juicios de valor respecto a ella y tomar las decisiones adecuadas para proseguir la actividad educativa mejorándola progresivamente*".

Siendo la evaluación un momento relevante de los procesos de enseñanza-aprendizaje, orientado a regular las actividades del profesor, alumno, materiales y la institución escolar; se da a través de siete etapas consistente en:

- Especificar las decisiones a tomar y los juicios a emitir.
- Describir la información necesaria.
- Plantear la obtención de la información.
- Obtener, analizar y registrar información.
- Formular juicios.
- Tomar decisiones.

[35] DE GUZMAN, M. & GIL, D. Óp. Cit. P.43.

- Resumir y dar a conocer los resultados de la evaluación.

El proceso de enseñanza-aprendizaje incluye implícitamente a la evaluación inicial, procesual y final, en la medida en que ésta se vaya haciéndose explícito a través de aplicación de instrumentos, el interés en él llevará a profundizar lo que es la evaluación y como mejorarla, de la misma forma que se hace con la enseñanza y el aprendizaje (Díaz,1995); así, la evaluación es un instrumento de seguimiento y mejora del proceso y una actividad colectiva por excelencia, donde los estudiantes tienen la ocasión de discutir, aspectos como el ritmo en que el profesor imprime el trabajo o la manera de dirigirse a ellos, y sus propias actitudes y logros.

La evaluación educativa según su temporalización puede ser:

a) Evaluación inicial

Se lleva a cabo en forma preliminar antes de impartir un tema o los contenidos de la asignatura para obtener información sobre la situación real del alumno, con la finalidad de indagar qué conocimientos tienen antes de iniciar el estudio del tema.

Según GIMÉNEZ (1997), "*pretende conocer los preconceptos de los alumnos, tener una intuición de sus intenciones, reconocer sus habilidades y destrezas procedimentales, tomar cuenta de sus actitudes y contrastar todo ello con lo que se pretende trabajar*" ([36]).

Adquiridos en asignaturas consideradas como requisitos y es base para impartir nuevos conocimientos; que desde la teoría del aprendizaje significativo, es averiguar qué sabe el alumno y qué tiene en su estructura mental.

[36] GIMÉNEZ, Joaquín (1997). *Evaluación en matemáticas una integración de perspectivas.* Madrid: Síntesis S.A.

ORLICH, (1994), indica "*esta evaluación se realiza mediante la aplicación de una prueba previa; de reactivos elaborados para recabar información de los conocimientos previos para tratar un tema*". ([37])

b) Evaluación procesual

Se lleva a cabo durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, para controlar, diagnosticar o regular, aprender de los errores cometidos y conseguir mejores logros.

Proporciona información cuantitativa y cualitativa necesaria para analizar las variables del proceso didáctico, corregir el propio proceso, reconducir la enseñanza y establecer una retroalimentación; suministrados periódicamente con el fin de verificar si el aprendizaje se está logrando realmente. Proporciona al profesor un feed-back continuo acerca de su enseñanza, para que pueda replantear sus estrategias.

Los instrumentos adecuados a la evaluación procesal son: Guía de observación, tabla de cotejo, escalas de valoración, pruebas de conocimiento, ficha de observación operacional.

c) Evaluación final

Se lleva a cabo al final de un proceso de enseñanza-aprendizaje, para promover a los estudiantes para nuevos estudios e indicar el resultado global alcanzado, que se traduce en una nota, como producto final del proceso enseñanza-aprendizaje.

La evaluación final adopta dos funciones:

- Función formativa, para adecuar la enseñanza al modo de aprendizaje del alumno o para retroalimentar la programación del profesor, con miras a mejorar el proceso de enseñanza en la unidad o tema siguiente.
- Función sumativa, para tomar la decisión última sobre el grado de lo alcanzado por un alumno y obrar en consecuencia.

---

[37] ORLICH, Donald (1994). *Técnicas de enseñanza o modernización en el aprendizaje*. México: Noriega editores.

2.7. LA MATEMÁTICA

Según el MINEDU (2006), "*La matemática es una ciencia que tiene como objeto las formas espaciales y las relaciones cuantitativas del mundo real. Añadimos que, además, nos permite el desarrollo de las capacidades matemáticas: razonamiento y demostración, comunicación matemática y resolución de problemas.*

Por otra parte, la matemática misma es una ciencia intensamente dinámica y cambiante. Varía de manera rápida y hasta turbulenta en sus propios contenidos, e incluso en su propia concepción profunda, aunque de modo más lento. Todo ello sugiere que, efectivamente, la actividad matemática no puede ser una realidad que se aborde fácilmente". ([38])

2.7.1. Importancia de las matemáticas en la vida diaria

El hombre siempre ha tenido la necesidad de explicarse, del universo y las cosas que en él ocurren. Desde que aprendió a contar hasta la teoría del caos, el ser humano ha expresado por medio de las matemáticas su capacidad creativa, su necesidad de evolución y trascendencia.

Actualmente, las matemáticas son una herramienta fundamental para el desarrollo de las disciplinas científicas y técnicas. Asimismo la industria, la prestación de servicios a gran escala, los medios de comunicación, el deporte de alto rendimiento, la música y el arte recurren, día a día, cada vez más a las matemáticas.

El vertiginoso desarrollo de nuevas tecnologías, como las computadoras, se debe, sin duda, a las matemáticas.

[38] MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2006). *Orientaciones para el Trabajo Pedagógico de matemática de la Calidad de la Educación Secundaria*, Fimart S.A.C. Lima – Perú.

Por ello, una de las características de las matemáticas en la actualidad, es su uso en prácticamente todas las áreas del quehacer humano, desde las actividades cotidianas hasta la investigación científica, la producción y la prestación de servicios.

Según ALARCÓN B. Jesús, (2004), "*el ser humano tiene la necesidad constante de crear y fortalecer sus conocimientos matemáticos, y esto es cierto tanto para los profesionales y los especialistas en diversas disciplinas, como para el ciudadano común*". ([39])

Acorde con esta realidad, las matemáticas son, hoy en día, una de las ciencias más activas y dinámicas; a partir de problemas que surgen en otras disciplinas, nuevas teorías son creadas para encontrarles solución. También aparecen dentro de su seno, nuevas formas de ver y atacar viejos problemas, desarrollándose así tanto las matemáticas puras como las aplicadas.

2.7.2. Capacidades del área de matemática en secundaria

En el caso del área de matemática, según el DCN (2008) "*las capacidades explicitadas para cada grado involucran los procesos transversales de razonamiento y demostración, comunicación matemática y resolución de problemas, siendo este último el proceso a partir del cual se formulan las competencias del área en los tres niveles*". ([40])

Razonamiento y demostración para formular e investigar conjeturas matemáticas, desarrollar y evaluar argumentos y comprobar demostraciones matemáticas, elegir y

[39] ALARCÓN BORTOLUSSI, Jesús, BONILLA RIUS, Elisa (2004). El *libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria* Mexico. 2ra Ed.: *Pág. 11.*
[40] MINISTERIO DE EDUCACIÓN, (2008). Diseño Curricular Nacional en la Educación Básica Regular, publicado en www.minedu.gob.pe. Revisado 2009.

utilizar varios tipos de razonamiento y métodos de demostración para que el estudiante pueda reconocer estos procesos como aspectos fundamentales de las matemáticas.

Comunicación matemática para organizar y comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad; para expresar ideas matemáticas con precisión; para reconocer conexiones entre conceptos matemáticos y la realidad, aplicarlos a situaciones problemáticas reales.

Resolución de problemas, para construir nuevos conocimientos resolviendo problemas de contextos reales o matemáticos; para que tenga la oportunidad de aplicar, adaptar diversas estrategias en diferentes contextos, para que al controlar el proceso de resolución reflexione sobre éste y sus resultados. La capacidad para plantear, resolver problemas, dado el carácter integrador de este proceso, posibilita la interacción con las demás áreas curriculares coadyuvando al desarrollo de otras capacidades; asimismo, posibilita la conexión de las ideas matemáticas con intereses y experiencias del estudiante.

En el nivel de educación secundaria, se busca que cada estudiante desarrolle su pensamiento matemático, con el dominio progresivo de los procesos de razonamiento y demostración, comunicación matemática y resolución de problemas, conjuntamente con el dominio creciente de los conocimientos relativos a número, relaciones, funciones, geometría, medición, estadística y probabilidad.

Asimismo, se promueve el desarrollo de actitudes que contribuyen al fortalecimiento de valores vinculados al área, entre ellos: la seguridad al resolver problemas; honestidad y transparencia al comunicar procesos de solución y resultados; perseverancia para lograr los resultados; rigurosidad para representar relaciones y plantear argumentos; autodisciplina para cumplir con las exigencias del trabajo; respeto y delicadeza al criticar argumentos, y tolerancia a la crítica de los demás.

2.7.3. Propósito del estudió, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria

En este escenario, el estudio de las matemáticas en la educación secundaria es fundamental para la formación de los estudiantes.

El estudio, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria persigue propósitos esencialmente formativos que consisten en:

- Desarrollar habilidades
- Promover actitudes positivas
- Adquirir conocimientos matemáticos

Estos propósitos forman un todo en relación dialéctica, es decir, que el avance o retroceso de uno de ellos repercute, de alguna manera, en otro.

Aquí se han listado solamente con fines de organización y no para señalar una jerarquía.

a) Desarrollar habilidades

Como se señala en el plan de estudios vigente, con el estudio de las matemáticas en la educación secundaria, se pretende que los estudiantes desarrollen habilidades operatorias, de comunicación y de descubrimiento, para que puedan aprender permanentemente, con independencia, así como resolver problemas matemáticos de diversa índole.

Es frecuente que el término habilidad se confunda con los de capacidad y destreza.

Para nuestros fines, hablamos de capacidades cuando nos referimos a un conjunto de disposiciones de tipo genético que, una vez desarrolladas por medio de la experiencia que produce el contacto con un entorno culturalmente organizado, darán lugar a habilidades individuales (Monereo, 1998).

Las habilidades son las posibles variaciones individuales, en el marco de las capacidades, que pueden expresarse en conductas en cualquier momento, porque han sido desarrolladas por medio de su uso, y que además pueden utilizarse o ponerse en juego, tanto consciente como inconscientemente, de forma automática.

Por destreza nos referiremos a la agilidad que pueden tener los estudiantes en la aplicación de ciertas técnicas manuales.

En la educación secundaria se busca desarrollar, entre otras:

- La habilidad de *calcular*, que consiste en establecer relaciones entre las cifras o términos de una operación o de una ecuación para producir o verificar resultados.
- La habilidad de *inferir*, que se refiere a la posibilidad de establecer relaciones entre los datos explícitos e implícitos que aparecen en un texto, una figura geométrica, una tabla, gráfica o diagrama, para resolver un problema.
- La habilidad de *comunicar*, que implica utilizar la simbología y los conceptos matemáticos para interpretar y transmitir información cualitativa y cuantitativa.
- La habilidad de *medir*, que se refiere a establecer relaciones entre magnitudes para calcular longitudes, superficies, volúmenes, masa, etcétera.
- La habilidad de *imaginar*, que implica el trabajo mental de idear trazos, formas y transformaciones geométricas planas y espaciales.
- La habilidad de *estimar*, que se refiere a encontrar resultados aproximados de ciertas medidas, de operaciones, ecuaciones y problemas.
- La habilidad de *generalizar*, que implica el descubrir regularidades, reconocer patrones y formular procedimientos y resultados.
- La habilidad para *deducir*, que se refiere a establecer hipótesis y encadenar razonamientos para demostrar teoremas sencillos. ([41])

[41] MONEREO, Charles *et al.*,(1998). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en el aula*, España, SEP/Fondo Mixto/Graó.

b) Promover actitudes positivas

Los valores de las personas se expresan de diversas maneras y por distintos medios; lo que hacemos, decimos, sentimos y pensamos refleja de alguna manera los valores que hemos asumido en la vida, estas expresiones se manifiestan por medio de las actitudes. Por actitud entendemos la conducta que se manifiesta de manera espontánea. En este sentido nos interesa que los estudiantes muestren interés ante las matemáticas, para ello, en y desde la clase de matemáticas es necesario fomentar actitudes como:

- La *colaboración*, que implica asumir la responsabilidad de un trabajo en equipo.
- El *respeto* al expresar ideas y escuchar a los demás.
- La *investigación*, que significa buscar y verificar diferentes estrategias para resolver problemas.
- La *perseverancia* la entendemos como el llevar a buen término el trabajo aun cuando los resultados no sean los óptimos.
- La *autonomía* al asumir la responsabilidad de la validez de los procedimientos y resultados.
- Una *sana autoestima*, que implica reconocer el valor del trabajo propio, para fortalecer la seguridad personal.

c) Adquirir conocimientos matemáticos

Por supuesto que la clase de matemáticas tiene como tarea específica el estudio de la disciplina, pero no en el sentido de formar *pequeños matemáticos*, sino de consolidar el proceso de formación básica a fin de lograr una cultura matemática significativa y funcional, es decir, que puedan usarla en las diversas actividades que realizan cotidianamente.

2.7.4. Los símbolos matemáticos

Según MINEDU (2007). "En la secundaria, el uso de las expresiones algebraicas (expresiones con letras, operaciones y números) aumentan considerablemente y los estudiantes empiezan a utilizar, entre otras, identidades notables (por ejemplo, el cuadrado de una suma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ecuaciones (por ejemplo, $2x+4=8$ y polinomios (por ejemplo, $x^2+4x-12$).

El camino que va desde la manipulación, por ejemplo, de fórmulas geométricas para hallar longitudes y áreas, de la suma y el producto de polinomios, es un camino largo, complejo y lleno de dificultades. En este camino conviene distinguir dos etapas.

1. En la primera, los símbolos substituyen a números, segmentos u otros objetos y su función es representarlos. En esta etapa los símbolos representan objetos, acciones sobre objetos o relaciones entre objetos, pero ellos mismos no se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones. Los valores que pueden tener los símbolos son los que permiten los objetos y la situación representada.

2. En una segunda etapa los valores que pueden tener los símbolos son los que se quiera considerar y no están condicionados por la situación que inicialmente representaban.

Ahora, los símbolos se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones e incluso se puede prescindir de los objetos, relaciones y situaciones que representan". ([42])

[42] MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2007), Resolución de ecuaciones, Primera ED. El Nocedal S.A.C. Lima-Perú.

2.7.5. Resolución de ecuaciones

En la antigüedad, algunas culturas representaron los números mediante letras. Los griegos usaban su alfabeto para representar los números, al igual que la numeración romana.

"En realidad, el Álgebra comienza cuando los matemáticos se empiezan a interesar por operaciones que se pueden realizar con cualquier número más que por los mismos números, lo que los llevó a generalizar un número cualquiera a través de una letra llamada variable.

Si bien en un principio no existían las variables, los problemas se plantearon mediante palabras, por lo que se le llamó Álgebra Retórica, y la variable era llamada cosa, de ahí que el Álgebra fuera conocida como "la regla de la cosa". A partir del siglo XII los árabes introducen el Álgebra Simbólica, la cual asigna símbolos a la variable buscada en el problema". ([43])

Tras muchos milenios, las ecuaciones matemáticas de la forma $ax + b = 0$ Se resuelven actualmente por diversos métodos, incluso, mediante el uso de computadoras. Existe *software* que resuelven diversos tipos de ecuaciones.

2.7.6. Resolución de ecuaciones con una sola variable

Desde la época de los faraones, el objeto de estudio básico del Álgebra ha permanecido invariable: hacer posible la solución de un problema matemático en donde hay un número desconocido. La variable se representa por un símbolo abstracto, que se utiliza hasta que se pueda establecer su valor numérico. Con la finalidad de expresar en un lenguaje formal (matemático), una situación planteada y poder darle solución, se establece una relación de igualdad.

[43] SOCAS, Robaina. Op. cit. Pág. 26.

Una ecuación con una variable es una igualdad donde hay un número llamado variable que cumple con ser la solución de la igualdad $(ax = b)$.

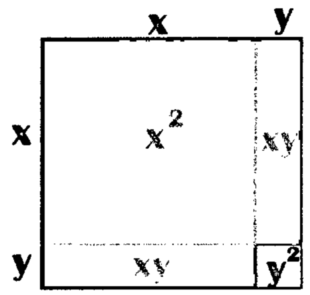
2.8. ECUACIÓN CUADRÁTICA O DE SEGUNDO GRADO

2.6.1. Breve resumen de la historia de la evolución de ecuaciones cuadráticas.

Entre los personajes mas resaltantes que aportaron en la historia de las ecuaciones cuadráticas fueron:

- **Mohammed Ibn Musa Al-Khawarizmi – árabe Siglos IX - X (780-850)**

Es uno de los padres del álgebra. El más conocido de los matemáticos árabes. Nacido en Khuwarismi, matemático y astrónomo es uno de los más grandes sabios del Islam. Vivió en Bagdad, trabajó en la Biblioteca del califa Al-Mamún. Autor de uno de los métodos más antiguos que se conocen para resolver ecuaciones de segundo grado. Dicho método geométrico, se conoce como "completar cuadrados". ([44])



$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

- **Bháskara**

Escribió dos libros de matemática. Estos son *Lilavati* y *Vijaganita*, donde se desarrollan ecuaciones indeterminadas de primer y segundo grado, ecuaciones

[44] S. GANDZ. Op. Cit. Pág. 33.

lineales algebraicas, ecuaciones cuadráticas, sistema de ecuaciones lineales y ecuaciones lineales indeterminadas ([45]).

En la matemática hindú se resuelven problemas con ecuaciones cuadráticas:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

2.6.2. Definición de ecuaciones cuadráticas

Son aquellas ecuaciones que presentan la siguiente forma general.

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \quad , \quad \forall a \neq 0 \text{ y } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Donde a, b y c son llamados coeficientes y que pueden ser reales y complejos.

- El coeficiente "a" se llama coeficiente **cuadrática** o de **segundo grado**.
- El coeficiente "b" se llama coeficiente **lineal** o de **primer grado.**
- El coeficiente "c" se llama termino **lineal**.

2.6.3. Tipos o formas de ecuaciones cuadráticas

Por su expresión algebraica se tiene:

a) **Ecuación en forma general**.- Este tipo de ecuación se clasifica en dos: Incompletas y Completas.

➢ ***Ecuaciones incompletas***.- se dice que una ecuación es incompleta, si los coeficientes b ó c ó ambos, son ceros.

Si $b = 0$ entonces : $\boxed{ax^2 + c = 0}$

Si $c = 0$ entonces : $\boxed{ax^2 + bx = 0}$

Si $b = c = 0$ entonces : $\boxed{ax^2 = 0}$

Ecuaciones cuadráticas incompletas.

[45] MINISTERIO DE EDUCACIÓN. Op. Cit. Pág. 60.

- ***Ecuaciones completas***.- Se dice que una ecuación es completa, si los coeficientes a, b y c son diferentes de cero.

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Ecuaciones cuadráticas completas. $(a, b, c \neq 0)$

b) Ecuación en forma de producto de dos factores o factorizadas.- Este tipo de ecuación es el producto de dos ecuaciones lineales y forma una ecuación cuadrática.

$$\boxed{(x \pm a)(x \pm b) = 0}$$

Producto de dos factores

$a, b, c \neq 0$

c) Ecuaciones en forma de binomio al cuadrado.- Este tipo de ecuación se clasifica en dos: con términos independiente y sin término Independiente.

- ***Con término independiente***.- Es donde aparece un coeficiente lineal y es de la siguiente forma:

$$\boxed{(x \pm a)^2 - c = 0}$$ Donde $a, c \neq 0$

- ***Sin término independiente***.- Es cuando no tiene un término lineal y es de la siguiente forma.

Donde $a \neq 0$

$$\boxed{(x \pm a)^2 = 0}$$

2.6.4. Soluciones o raíces de una ecuación cuadrática

Para hallar las raíces de una ecuación se distingue los siguientes casos.

Caso 1: si $b = 0$, la ecuación es de la forma: $\boxed{ax^2 + c = 0}$

Despejando "x", obtenemos: $ax^2 = c \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

$$\boxed{\Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}} \begin{cases} x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}} \\ \\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{cases}$$

<u>Caso 2:</u> Si $c = 0$, la ecuación es de la forma $ax^2 + bx = 0$, las raíces se obtiene sacando a "x" como factor común:

$$\boxed{ax^2 + bx = x(ax+b)} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

2.6.5. Aplicaciones de la resolución algebraica en las ecuaciones cuadráticas

a) <u>Propiedades de las raíces.</u>

- ***<u>Suma de raíces</u>***

De la formula para resolver la ecuación completa de segundo grado, separando las raíces se tiene.

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$\boxed{\therefore x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$$ ***Suma de raíces***

- ***<u>Producto de raíces</u>***

De la formula para resolver la ecuación completa de segundo grado, separando las raíces se tiene.

Multiplicando miembro a miembro:

$$\Rightarrow x_1.x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x_1.x_2 = \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\boxed{\therefore x_1.x_2 = \frac{c}{a}}$$ ***Producto de raíces***

b) <u>Formar una ecuación de segundo grado.</u>

Conociendo las dos raíces X_1 y X_2 de una ecuación de segundo grado, ésta se construye empleando la suma o producto de dichas raíces.

Luego la ecuación que dio origen a X_1 y X_2 es:

$(x-x_1)(x-x_2)=0$, efectuando se tiene:

$$x^2 - x.x_2 - x_1.x + x_1.x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - x\underbrace{(x_2+x_1)}_{\text{Suma de raíces}} + \underbrace{x_1.x_2}_{\text{Producto de raíces}} = 0$$

$\boxed{\therefore x^2 - Sx + P = 0}$, siendo $S = x_1 + x_2$, $P = x_1.x_2$

c) <u>Estudio acerca de la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática.</u>

El binomio que figura abajo es radical en la formula.

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Se llama el discrimínate de una ecuación cuadrática a b^2-4ac, y esto nos permitirá conocer la naturaleza de las soluciones (reales, imaginarios, dobles). Sin necesidad de resolver la ecuación.

El discriminante: b^2-4ac se denota por el símbolo:

$$\boxed{\Delta = b^2-4ac}$$

- ***Ecuaciones con discriminante positivo***.- Dada la ecuación de segundo grado: $ax^2+bx+c=0$, si su discriminante es positivo, entonces existen dos raíces o soluciones reales diferentes, que son:

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}\quad \begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Raíces o soluciones reales

- ***Ecuaciones con discriminante negativo***.- Dada la ecuación de segundo grado: $ax^2+bx+c=0$, si su discriminante es negativo, entonces la ecuación no tiene raíces reales, estas raíces serán dos soluciones complejas, que son:

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}\quad \begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Raíces o soluciones complejas

- ***Ecuaciones con discriminante cero***.- Dada la ecuación de segundo grado: $ax^2+bx+c=0$, si su discriminante es cero, entonces la ecuación tiene una raíz doble (raíces iguales), que son:

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}\quad \begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{0}}{2a}\Rightarrow x_1=\dfrac{-b}{2a} \\ \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{0}}{2a}\Rightarrow x_2=\dfrac{-b}{2a} \end{cases}$$

Raíces iguales

2.6.6. Resolución de una ecuación general de segundo grado con una incógnita.

a) Método de factorización

Consiste en factorizar el polinomio de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$ siempre y cuando se pueda.

Los pasos de este método son los siguientes:

- Se trasladan todos los términos a un sólo miembro dejando el otro miembro igual a cero.
- Se factoriza este miembro por el método del aspa simple.
- Para obtener las raíces de la ecuación, se iguala cada factor a cero.

b) Método completamiento cuadrados:

La idea consiste en expresar un polinomio de 2do grado:

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ Como: $\boxed{a(x-h)^2 + k = 0}$

c) Método de la fórmula general:

De la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$ se deduce que:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

Formula para resolver ecuaciones completas de segundo grado

2.9. MARCO CONCEPTUAL

Álgebra: Rama de las matemáticas que trata de la generalización del cálculo aritmético a expresiones compuestas por números y letras que representan cantidades variables (álgebra clásica) y que a partir de la teoría de conjuntos, estudia las estructuras (álgebra moderna).

Algeplano: Es un material manipulable que se utiliza en la enseñanza-aprendizaje como representación geométrica de una expresión algebraica, ecuaciones lineales, cuadráticas, de trinomios de términos positivos de segundo grado que son cuadrados perfecto. Su aplicación a la resolución de ecuaciones cuadráticas, constituye un método mixto (geométrico y algebraico).

Aprendizaje Significativo: E s aquel que el estudiante ha logrado interiorizar y retener luego de haber encontrado un sentido teórico o una aplicación real para su vida; este tipo de aprendizaje va más allá de la memorización, ingresando al campo de la comprensión, aplicación, síntesis y evaluación. Dicho de otra forma, el aprendizaje debe tener un significado real y útil para el estudiante, soslayando la visión de aprender por el simple hecho de hacerlo.

Aprendizaje: El aprendizaje es el proceso a través del cual se adquieren nuevas habilidades, destrezas, conocimientos, conductas o valores como resultado del estudio, la experiencia, la instrucción, el razonamiento y la observación.

Conjunto solución de una ecuación: Es el conjunto formado por todas las soluciones de la ecuación.

Constructivismo: Confluencia de diversos enfoques psicológicos, que enfatizan la existencia y prevalencia en los sujetos cognoscentes de procesos activos en la construcción del conocimiento, los cuales permiten explicar la génesis del comportamiento y del aprendizaje.

Currículo: Sistema ordenado de objetivos, estrategias, contenidos, medios y procedimientos para lograr objetivos de aprendizaje en relación con las características propias de los alumnos.

Didáctica: Es ciencia y arte de enseñar. Es ciencia en cuanto investiga y experimenta nuevas técnicas de enseñanza. Es arte cuando establece normas de acción o sugiere normas de comportamiento didáctico, basándose en los datos científicos y empíricos de la educación.

Ecuación: Es una relación de igualdad que se presenta bajo la forma de dos expresiones algebraicas separadas por el signo (=).

Ecuaciones equivalentes: Son ecuaciones que tienen el mismo conjunto solución.

Enseñanza: La enseñanza es el acto de dirigir la transferencia de conocimientos con técnicas y procedimientos apropiados durante el proceso de aprendizaje de los alumnos.

Estrategia: Conjunto de métodos, procedimientos y técnicas que permiten y facilitan lograr determinados objetivos con eficacia, eficiencia y efectividad.

Material manipulable: Se definen como cualquier material u objeto físico del mundo real, que los estudiantes pueden "palpar" para ver y experimentar conceptos matemáticos. Los materiales manipulables son un recurso sumamente eficaz para el aprendizaje de las matemáticas.

Materiales didácticos: Son todos aquellos medios y recursos que facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje, dentro de un contexto educativo global y sistemático, y estimula la función de los sentidos para acceder mas fácilmente a la información, adquisición de habilidades y destrezas, y a la formación de actitudes y valores

Medio didáctico: Es cualquier material elaborado con la intención de facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje..

Métodos de aprendizaje: Formas o modos empleados por los alumnos para captar los conocimientos, desarrollar las actitudes y valores necesarios para su desenvolvimiento en la sociedad.

Modulo didáctico: Son materiales educativos en unidades de estudio y elaborados por el docente con la finalidad de mejorar el aprendizaje, a través de la interacción sistemática y sinérgica entre alumno-alumno y alumno-profesor. Tiene como objetivo transformar el proceso de enseñanza-aprendizaje dentro de un ambiente de (autonomía, respeto a la diversidad, igualdad, solidaridad, cooperación…), en la construcción del conocimiento por el alumno; donde el maestro es el promotor sinérgico del aprendizaje.

Motivación: Deriva del vocablo **"moveré"** que significa moverse, poner en movimiento **o** estar listo para actuar.

Proceso de resolución de una ecuación: Consiste en sustituir la ecuación original por otra equivalente que tenga el mismo conjunto de soluciones, y que sea más fácil de resolver.

Recurso educativo: Es cualquier material que, en un contexto educativo determinado, sea utilizado con una finalidad didáctica o para facilitar el desarrollo de las actividades formativas. Los recursos educativos que se pueden utilizar en una situación de enseñanza y aprendizaje pueden ser o no medios didácticos.

Resolver una ecuación: Significa encontrar todos los valores de sus variables, para los cuales la ecuación se transforma en una igualdad numérica verdadera.

Solución de una ecuación: Es el valor (raíz o cero) de la variable que satisface la ecuación, es decir, transforma la ecuación en una igualdad numérica verdadera.

Variable o incógnita: Es un **símbolo** destinado a ser sustituido en la ecuación, por un elemento del conjunto donde se buscan las soluciones.

Verificación de una solución: Para verificar si una solución es correcta, hay que sustituir la variable (o las variables) por esta solución en ambos miembros de la ecuación, calcularlos y corroborar que son iguales numéricamente.

CAPÍTULO III

ASPECTOS METODOLÓGICOS

3.1. HIPÓTESIS

3.1.1. Hipótesis general

Con el uso del material didáctico algeplano, en el proceso de enseñanza- aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas, se logra un aprendizaje significativo en las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay – 2010.

3.1.2. Hipótesis especificas

1. La representación de las ecuaciones cuadráticas, con el uso del material didáctico algeplano es efectivo y contribuye en el aprendizaje significativo, de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay - 2010.
2. La resolución de ecuaciones cuadráticas, con el apoyo del material didáctico algeplano, mejora el aprendizaje significativo de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada, Abancay - 2010.
3. Las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada, del distrito de Abancay, demuestran actitudes positivas para el logro del aprendizaje significativo de las ecuaciones cuadráticas, con el uso del material didáctico algeplano.

3.2. SISTEMA DE VARIABLES

- **Variable independiente:** Material didáctico algeplano
- **Variable dependiente:** Aprendizaje significativo de ecuaciones cuadráticas.

3.3. OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES:

VARIABLES	INDICADORES	ÍNDICES
Material didáctico algeplano	➢ Representación de las ecuaciones cuadráticas con el material didáctico Algeplano.	1. Representa y agrupa expresiones algebraicas. 2. Representa una E.C. e identifica los términos y coeficientes. 3. Representa una E.C. en forma general completa e incompleta. 4. Representa una E.C. en forma de producto de dos factores. 5. Representa una E.C. en forma de binomio al cuadrado con término dependiente y independiente.
	➢ Resolución de ecuaciones cuadráticas con el apoyo del material didáctico Algeplano.	1. Comprueba si las soluciones de una E.C. son correctos o incorrectos. 2. Resuelve E.C. incompletas. 3. Determina la suma de las raíces de una E.C. 4. Determina el producto de las raíces de una E.C. 5. Forma una E.C. dada sus raíces. 6. Resuelve E.C. en forma factorizada. 7. Resuelve E.C. en forma de binomio al cuadrado. 8. Resuelve E.C. completando cuadrados. 9. Resuelve E.C. con la formula general (Bháskara) 10. Resuelve problemas aplicados a la vida cotidiana.
	➢ Actitud de las alumnas hacia el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas	1. Muestra empeño al realizar y presentar sus tareas. 2. Toma la iniciativa en las actividades realizadas. 3. Consulta frecuentemente. 4. Muestra interés y motivación hacia el aprendizaje de las E.C. 5. Es perseverante en el desarrollo de los ejercicios.
Aprendizaje significativo de ecuaciones cuadráticas	- Calificativos obtenidos en la prueba de entrada. - Calificativos obtenidos en la evaluación de proceso. - Calificativos obtenidos en la prueba de salida.	• Rendimiento deficiente [00 , 07] • Rendimiento insuficiente [08 , 10] • Rendimiento suficiente [11 , 13] • Rendimiento satisfactorio [14 , 18] • Rendimiento excelente [19 , 20]

- **Variables intervinientes:**

  Docente: El profesor constituye una de las variables que más influye en el proceso de enseñanza y aprendizaje, tanto por el grado de conocimiento de la materia que imparte, como por su estilo para presentar y organizar el material de aprendizaje y su capacidad para comunicarse y transmitir conocimientos valores a los estudiantes.

  Contenidos: Unidad de ecuaciones cuadráticas, organizada en función de logros y fines dentro del plan curricular.

  Métodos: En el grupo experimental se usa el método activo, con participación de los estudiantes tanto individual como grupal, con ayuda de los cuadernillos y el material didáctico algeplano; mientras en el grupo de control se hace en forma expositiva por el profesor, con limitada participación de los estudiantes.

  Evaluación: Se aplica una prueba de entrada a ambos grupos, las evaluaciones de proceso de cada grupo se hace en forma independiente, y una prueba de salida se administra a ambos grupos; de acuerdo a lo establecido en el plan curricular.

- **Variables extrañas:**

  Edad: Fluctúa entre los 13 – 15 años.

  Condición socio económico: son de clase media.

  Actividad y apoyo de los padres: comerciantes, empleados públicos y agricultores.

3.4. DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

El diseño usado corresponde al tipo cuasi-experimental, con muestras no aleatorias, pues los sujetos no son asignados al azar a los grupos, ni emparejados; sino dichos grupos ya están formados antes del experimento, son grupos intactos (la razón por la que surgen y la manera como se formaron fueron independientes o aparte del experimento) HERNÁNDEZ, (1997) ([46]).

Pasos a seguir para el proceso de investigación:

1. La investigación se realiza con medición previa (pre-prueba) y con medición posterior (post-prueba) aplicadas en el grupo experimental y el grupo control.

2. Para la elección de la muestra, se toman en cuenta los antecedentes académicos de las alumnas de las cuatro secciones correspondientes, al segundo grado de secundaria.

3. El grupo experimental y el grupo control, se elige mediante el muestreo aleatorio simple, previa constatación de que su antecedente académico es homogéneo, ratificados con la administración de una prueba de entrada.

El esquema del diseño, se expresa de la siguiente manera.

Grupo experimental:	Y_1	X	W_1	X	W_2	X	W_3	X	Y_2
....									
Grupo de control:	Y_3				Z				Y_4

Donde:

X: Enseñanza de ecuaciones cuadráticas, mediante el material didáctico algeplano.

Z: Enseñanza tradicional de las ecuaciones cuadráticas.

Y_1, Y_3: Prueba de entrada del grupo experimental y de control.

W_i: Evaluación del indicador durante el proceso de experimentación.

Y_2, Y_4: Prueba de salida del grupo experimental y de control.

El grupo experimental y el grupo de control son independientes.

[46] HERNANDEZ, R. (2006); *Metodología de investigación.* México: Interamericana. S.A. Pág. 265.

3.5. TIPO DE INVESTIGACIÓN

Siguiendo los tipos y métodos de investigación educativa propuesta por VALDERRAMA M, Santiago la investigación es ([47]):

Por su finalidad: Es una investigación aplicada, por que está orientada a resolver un problema práctico del fenómeno educativo.

Por su alcance temporal: Es una investigación sincrónica, pues el resultado de un estudio en un periodo de tiempo corto o en un momento específico.

Por su profundidad: Es una investigación explicativa, pues además de medir las variables, analiza las relaciones entre ellas y otros factores que intervienen.

Por su amplitud: Es de carácter micro-educacional.

Por su fuente: Es mixta, puesto que utilizan dados obtenidos de fuentes primarias y secundarias.

Por su carácter: Lo predominante es cuantitativo.

Por su naturaleza: Tiene los aspectos de empírica-experimental-documentales.

Por su marco: Predomina la investigación de campo.

Por el tipo de estudio: Es una investigación evaluativa, pues pretende probar la eficacia de una estrategia didáctica y luego apreciar e enjuiciar el logro de los objetivos en la aplicación del material didáctico algeplano.

Objeto al que se refiere: Es una investigación disciplinar, pues se refiere al proceso de enseñanza aprendizaje de un tema correspondiente a una asignatura.

[47] VALDERRAMA M, Santiago; *pasos para elaborar proyectos y tesis de investigación científica*. Lima - Perú. Ed. San Marcos.

3.6. POBLACIÓN Y MUESTRA

3.6.1. Población

Conformado por 164 estudiantes de las 4 secciones (A, B, C y D) del tercer grado de secundaria de la Institución Educativa Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay, matriculadas en el año escolar 2010. Las alumnas que constituyen las cuatro secciones (bloques o conglomerados) ya están constituidos desde el primer grado de secundaria y son grupos con cierta estabilidad y homogeneidad en el rendimiento académico.

a) Características y delimitaciones

El trabajo de campo se desarrolló con las alumnas de 13 a 15 años de edad y con una homogeneidad en el rendimiento académico, en el tercer grado de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay.

b) Ubicación espacio – temporal

La I.E. Aurora Inés Tejada esta ubicada entre las avenidas Arenas y Núñez, del distrito y provincia de Abancay del departamento de Apurímac. El trabajo de campo se realizó a partir del mes de Junio al mes de Agosto en el año 2010.

3.6.2. Muestra y su elección

Se eligió una muestra no probabilística y aleatorio simple, conformada por dos secciones de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay, elegidas previa comparación de sus antecedentes académicos del grado anterior, saliendo como elegido el grupo experimental 3ro. "C" constituido por 42 alumnas y el grupo control 3ro. "D" constituido por 38 alumnas, ambos del turno tarde.

Criterios / Grupo	Alumnas	Edad promedio
Grupo experimental sección "C"	42	13 – 15
Grupo control sección "D"	38	

3.7. CONTROL Y VALIDEZ DEL DISEÑO

3.7.1. Validez interna

Para la manipulación de la variable independiente, se consideraron diversos criterios y procedimientos, entre ellos:

a) El nivel académico de las alumnas, se obtiene de las actas de evaluación correspondiente al año académico 2009, del segundo grado, de la asignatura de: matemática, cuyos promedios por aula fueron: 11,55 para el 2º "C" y 11,64 para el 2º "D"; y cómo promedio general de las dos secciones resulta 11,59 ver (anexo 2), cómo estos promedios no tienen diferencia significativa que lo consideramos relativamente equivalentes.

b) En la segunda sesión de clase del mes de junio, se tomó la prueba de entrada; Siendo los promedios: 08,6 en el tercer grado "C" y 08,4 en el tercer grado "D" ver (anexo Nº 5), cómo se observa, también la diferencia entre los promedios no es significativa y podemos seguir considerando cómo equivalentes.

c) Los horarios de clase de los dos grupos de estudio fue de turno tarde y el área de matemática se ha desarrollado 04 horas lectivas durante la semana, divididas en dos sesiones de 2 horas pedagógicas de 40 minutos cada uno.

d) El objetivo de la prueba de entrada es conocer el nivel de conocimiento y los saberes previos de las alumnas, para incursionar en el estudio de las ecuaciones cuadráticas. Los ítems de ésta prueba fueron los mismos para el grupo control y el grupo experimental calificado por un mismo docente.

e) El grupo experimental y el grupo de control estuvieron dirigidos por distintos profesores.

f) En ambos grupos se desarrollan los mismos temas, diferenciándose en el tratamiento metodológico, en el enfoque del tema, secuencia del desarrollo de los contenidos y en el uso de materiales.

3.7.2. Validez externa

¿Cómo generalizamos los hallazgos y resultados de la investigación?

La población de estudio está constituida por los 164 alumnas, del tercer grado de secundaria de la Institución Educativa Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay y las demás Instituciones Educativas de la provincia de Abancay, presentan las mismas características a los grupos estudiados. Por lo tanto, se puede generalizar a todo los estudiantes del tercer grado de secundaria de las diferentes Instituciones Educativas del departamento de Apurímac.

3.8. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE COLECTA DE DATOS

Las técnicas e instrumentos utilizados para recolectar los dados de los estudiantes son los siguientes ([48]).

- **Técnicas:**

Pruebas de tipo test: Estas pruebas consisten en plantear al estudiante un conjunto de reactivos para que demuestren el dominio de determinadas capacidades; generalmente se aplica al finalizar una unidad de aprendizaje, para comprobar si los estudiantes lograron o no los aprendizajes esperados.

Observación sistemática: Es una técnica que consiste en examinar atentamente un hecho, un objeto o aquello que es realizado por otro sujeto. Es uno de los recursos más importantes con que cuenta el docente para evaluar y recoger información sobre las

[48] MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2007), *Guía de evaluación del aprendizaje*, segunda ED. Corporación Grafica Navarrete S.A.C. Lima – Perú.

capacidades y actitudes de los estudiantes, ya sea de manera grupal o individual, dentro o fuera del aula.

Ejercicios prácticos: Conjunto de tareas o actividades que realizan los estudiantes para complementar o reforzar sus aprendizajes. También se realiza como transferencia de lo aprendido a situaciones nuevas. Estos ejercicios se pueden realizar en las distintas áreas y que son un complemento ideal para el desarrollo de las capacidades. Su aplicación es muy ventajosa, pues los estudiantes realizan como parte de las actividades pedagógicas programadas por el docente, eliminado la carga negativa que se genera debido a una mala concepción de la evaluación. Los ejercicios prácticos pueden ser efectuados de manera individual o grupal.

- **Instrumentos:**

Pre test: Este instrumento nos permitió recabar los conocimientos previos que poseen tanto los estudiantes del grupo control y experimental y de esa manera poder realizar las sesiones de aprendizaje de una manera adecuada acorde con los momentos.

Post test: Nos permitió recolectar datos del grupo experimental y control para verificar si en el grupo experimental mejoró su rendimiento académico con el uso del material didáctico algeplano en la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas, permitiéndonos validar y consolidar la hipótesis.

Lista de cotejo: Este instrumento sirvió para registrar información sobre la representación y resolución de ecuaciones cuadráticas, que se emplearon tanto para la evaluación de capacidades como de actitudes durante las sesiones de aprendizaje.

Guías de prácticas (Cuadernillo de actividades y ejercicios): Las guías de práctica nos sirvió de soporte para poder ver los avances en la enseñanza del grupo experimental, permitiendo cumplir con los objetivos y metas que se han trazado en la investigación.

Cuestionario tipo lickert: El cuestionario ha sido dirigida a las alumnas de tercer grado del grupo experimental, la cual nos permitió ver el manejo, desenvolvimiento, actitud, comportamiento que presenta el estudiante al utilizar el material didáctico algeplano en las diversas actividades realizadas, durante las sesiones de clases de ecuaciones cuadráticas.

3.9. PROCESO DE EXPERIMENTACIÓN DE LA PROPUESTA

Las sesiones de clase, tanto en el grupo experimental y de control se llevó a cabo tomando como referencia el programa oficial de matemática que está programado en DCN (2008) a nivel nacional, para el tercer grado de secundaria, coincidiendo ambos grupos en el objetivo y contenido global del capitulo correspondiente de ecuaciones cuadráticas.

En el grupo experimental se empleó el material didáctica algeplano como material educativo para reforzar el aprendizaje de ecuaciones cuadráticas y del mismo modo se complementa con guías teóricas y prácticas con el objetivo de lograr el aprendizaje significativo de las alumnas. Mientras que en el grupo control se llevó el proceso de enseñanza-aprendizaje con el método tradicional, netamente expositiva y sin uso de material alguno elaborado por el docente.

La experimentación del trabajo se lleva de acuerdo al siguiente cronograma de tiempo.

Tabla Nº 01: Cronograma de tiempo para la experimentación del trabajo de campo.

Grupo	Horas Ped/semanal	Nº de sesiones/ semanal	Nº de semanas	Nº total de horas	Total de sesiones	Turno
Experimental	04	02	06	24	12	Tarde
Control	04	02	06	24	12	Tarde

FUENTE: Elaboración propia por los autores

CAPÍTULO IV

ANALISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1. TRATAMIENTO Y ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LOS DATOS

A continuación se describe en forma explícita los procedimientos estadísticos y de análisis que se han desarrollado con los resultados obtenidos del experimento.

4.1.1. Proceso de validación de la variable independiente

El uso del material didáctico algeplano, ha sido observado y evaluado por instrumentos como: lista de cotejo, cuadernillos de actividades y ejercicios, para una validación efectiva y eficiente del proceso de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas.

4.1.2. Prueba de entrada o pre - test

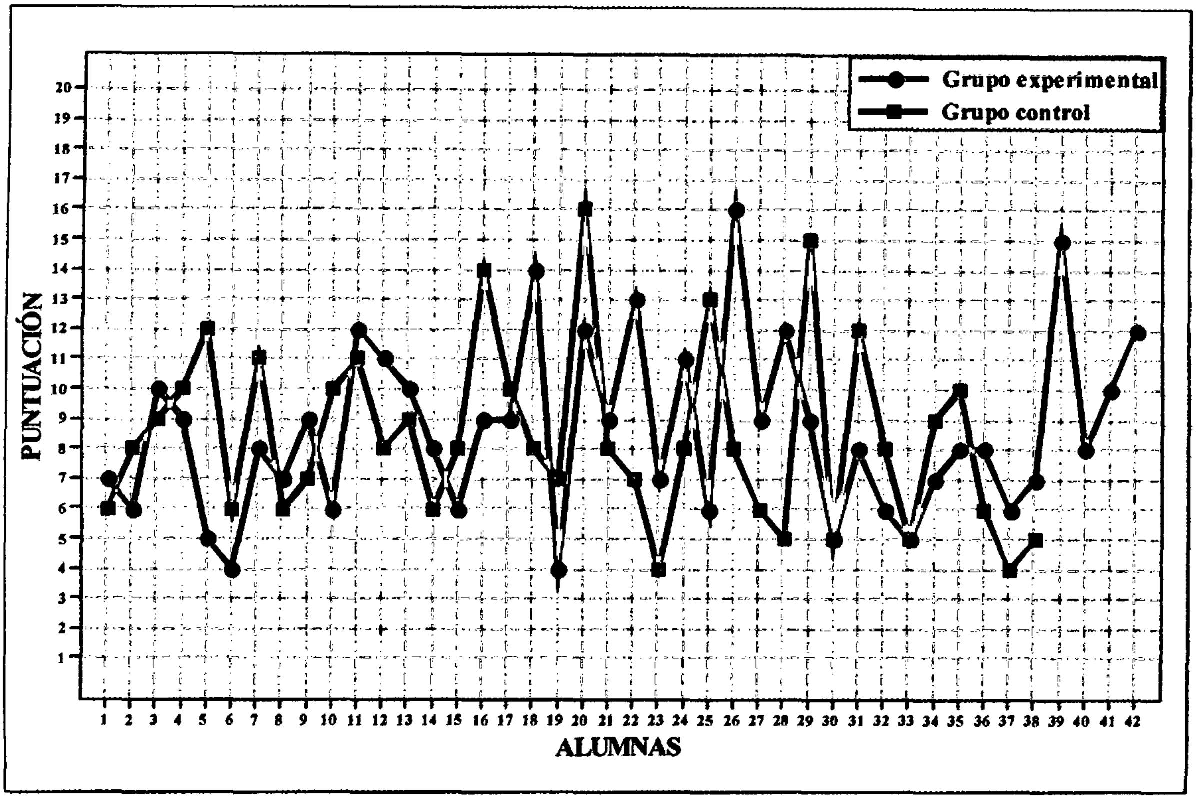
Esta prueba consiste en una lista de preguntas diversas, que evalúa los conocimientos previos que trae consigo el estudiante, los mismos que son necesarios para abordar el estudio eficaz de las ecuaciones cuadráticas y sus diversas aplicaciones.

Tabla Nº 02: Resultados obtenidos en la prueba de entrada.

CATEGORÍAS	3ro. Grado "C" (Grupo experimental)	3ro. Grado "D" (Grupo control)
Nº de alumnas	42	38
Nota mayor	16	16
Nota menor	04	04
Rango	12	12
Promedio	8,64	8,42
Varianza	8,43	8,95
Desviación estándar	2.90	2.99
Coeficiente de variación	33,59 %	35,53 %

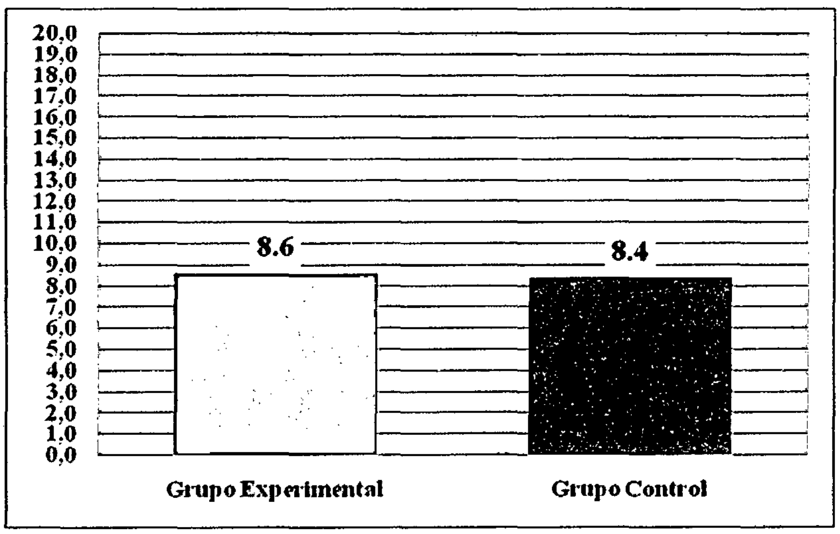
FUENTE: Elaboración propia de resultados obtenidos de la prueba de entrada.

Gráfico N° 01: Resultados de la prueba de entrada del grupo experimental y grupo control.



En el gráfico N° 01, se observa los puntajes obtenidos de las alumnas en la prueba de entrada. Este nos facilitó para comprobar los conocimientos que tienen consigo las alumnas para incursionar en el estudio de las ecuaciones cuadráticas. Los ítems de esta prueba fueron los mismos para el grupo experimental y el grupo control calificado por un mismo docente.

Gráfico N° 02: Comparación de los promedios generales de la prueba de entrada.



a) Análisis e interpretación

Observando la tabla Nº 04 y los gráficos Nº 01 y Nº 02, se analiza los resultados obtenidos de la prueba inicial del grupo experimental y grupo control de la siguiente forma.

En la sección "C" de tercer grado se obtuvo *16 puntos* como calificativo mayor y como calificativo menor *04 puntos*; mientras en la sección "D" de tercer grado se obtuvo *16 puntos* como calificativo mayor y como calificativo menor *04 puntos*, además, el promedio general de los calificativos obtenidos en el tercero "C" es de *8,64 puntos*; mientras en tercero "D" es de *8.42 puntos;* el coeficiente de variación de las notas, de las secciones son 0,33 y *0,35* respectivamente, la diferencia entre los coeficientes de variación no es significativa, ver (anexo Nº 05). Estos resultados verifican que las alumnas obtuvieron un *rendimiento insuficiente* dado que los promedios pertenecen al intervalo de [08 - 10], de las dos secciones, evidenciadas en la prueba inicial.

Las alumnas tuvieron dificultades en: despejar la variable o incógnita, en el manejo de ley de signos matemáticos, simplificar los términos semejantes de una ecuación, remplazar el valor numérico de la variable, realizar las operaciones algebraicas como la suma, resta, multiplicación y división. A si mismo muchas de las alumnas tienden a memorizar las expresiones algebraicas para resolver las ecuaciones cuadráticas, sin saber su significado. También podemos distinguir que hay alumnas con conocimientos previos y formalizados sobre expresiones algebraicas.

Para abordar el estudio de las ecuaciones cuadráticas, fue necesario una retro-alimentación y reforzar en los temas pertinentes para el desarrollo de las ecuaciones cuadráticas.

Por tanto afirmamos que los promedios de las alumnas de las dos secciones al inicio fueron homogéneos.

Luego, de este resultado se produce la separación en el tratamiento metodológico entre los grupos de estudio, y se vuelve a comparar una vez terminado el desarrollo de la unidad de ecuaciones cuadráticas.

4.1.3. Resultados de la representación de ecuaciones cuadráticas

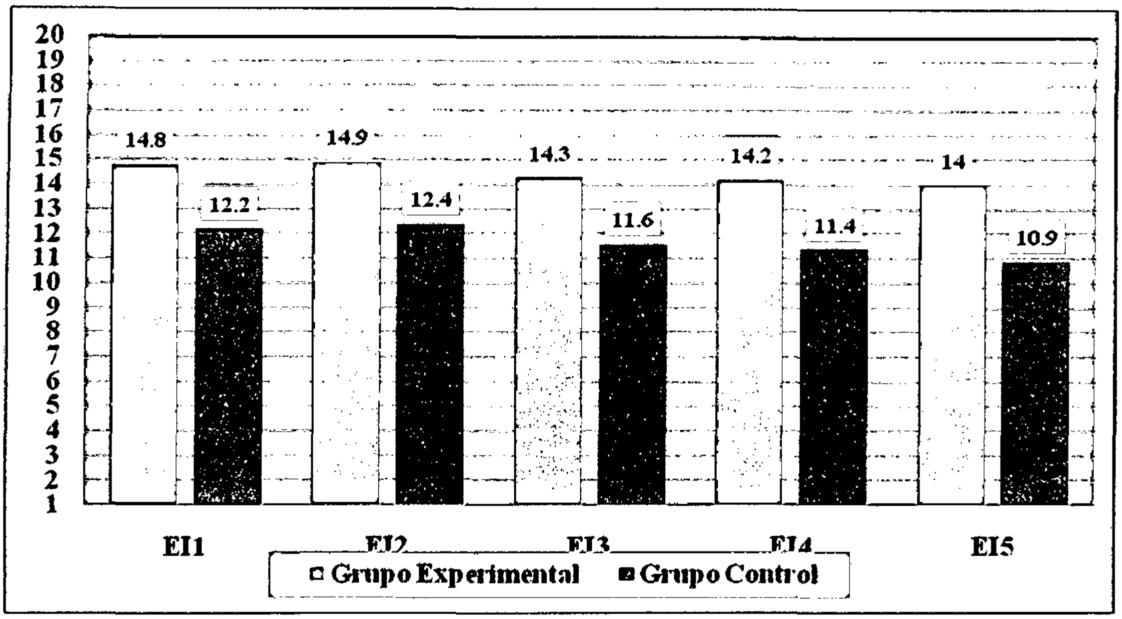
En la siguiente tabla N° 03, se muestra los resultados de la evaluación de los diferentes indicadores sobre la representación de ecuaciones cuadráticas, dichos resultados fueron recogidos durante las sesiones didácticas mediante la lista de cotejos.

Tabla N° 03: Comparación de los resultados de los dos grupos en la representación de ecuaciones cuadráticas.

Indicadores de evaluación en la representación de ecuaciones cuadráticas	[redacted]			
	Puntaje alcanzado	Promedio Alcanzado	Puntaje alcanzado	Promedio Alcanzado
EI1= Representa y simplifica expresiones algebraicas.	124	14,8	93	12,2
EI2= Representa una ecuación cuadrática e identifica los términos y coeficientes	125	14,9	94	12,4
EI3= Representa una ecuación cuadrática en forma general completa e incompleta.	120	14,3	88	11,6
EI4=Representa una ecuación cuadrática en forma de producto de dos factores.	119	14,2	87	11,4
EI5= Representa una ecuación cuadrática en forma de binomio al cuadrado con término y sin término independiente.	118	14	83	10,9
Promedio general		14,4		11,7

FUENTE: Elaboración propia de los resultados de la lista de cotejo.

Grafico N° 03: Comparación de los promedios alcanzados. en los diferentes indicadores en la representación de ecuaciones cuadráticas.



Interpretación del gráfico N° 03:

EI1: Se observa en el gráfico N° 03, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 14,8 puntos, llegando a un rendimiento satisfactorio, dado que el promedio pertenece al intervalo [14-18]; el cuál demuestra que la enseñanza-aprendizaje con el uso del material didáctico algeplano en la representación y simplificación de expresiones algebraicas fue satisfactorio, porque el material didáctico permitió a visualizar y manipular las expresiones algebraicas. Mientras las alumnas del grupo control tienen muchas dificultades, en representar y simplificar una expresión algebraica, obteniendo un promedio de 12,2 puntos, llegando a un rendimiento suficiente porque el promedio pertenece al intervalo [11-13].

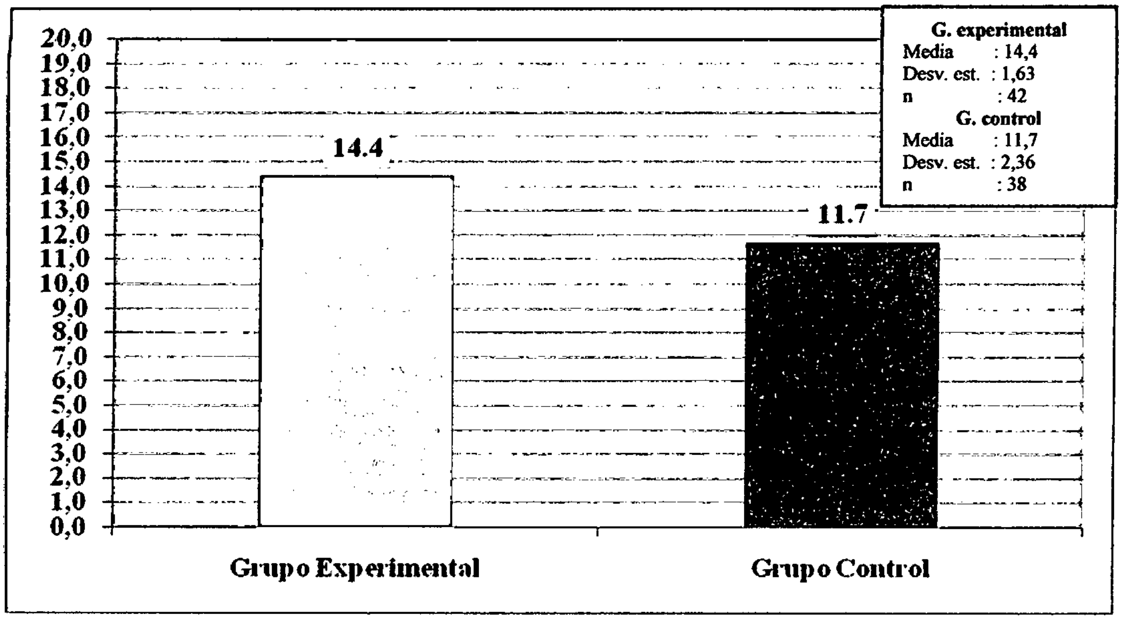
EI2: Se observa en el gráfico N° 03, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 14,9 puntos, llegando a un rendimiento satisfactorio dado que el promedio pertenece al intervalo [14-18]; el cuál demuestra que las alumnas representan una ecuación cuadrática e identifica los términos y coeficientes de una ecuación cuadrática, utilizando el material didáctico algeplano, porque el material didáctico permitió a visualizar, manipular y representar una ecuación cuadrática. Mientras las alumnas del grupo control tienen muchas dificultades, en representar una ecuación cuadrática e identifica los términos y coeficientes, obteniendo un promedio de 12,4 puntos, llegando a un rendimiento suficiente porque el promedio pertenece al intervalo [11-13].

EI3: Se observa en el gráfico N° 03, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 14,3 puntos, llegando a un rendimiento satisfactorio dado que el promedio pertenece al intervalo [14-18]; el cuál demuestra que las alumnas representan en forma general completa e incompleta una ecuación cuadrática, utilizando el material didáctico algeplano, porque el material didáctico permitió a visualizar, manipular y representar una ecuación cuadrática. Mientras las alumnas del grupo control tienen muchas dificultades en representar, una ecuación cuadrática en forma general completa e incompleta, obteniendo un promedio de 11,6 puntos, llegando a un rendimiento suficiente porque el promedio pertenece al intervalo [11-13].

EI4: Se observa en el gráfico N° 03, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 14,2 puntos, llegando a un rendimiento satisfactorio dado que el promedio pertenece al intervalo [14-18]; el cuál demuestra que la enseñanza-aprendizaje con el uso del material didáctico algeplano en la representación de una ecuación cuadrática, en forma de producto de dos factores fue satisfactorio, porque el material didáctico permitió a representar geométricamente, obteniendo los factores de una ecuación. Mientras las alumnas del grupo control tienen muchas dificultades, en representar una ecuación cuadrática en forma de producto de dos factores, obteniendo un promedio de 11,4 puntos, llegando a un rendimiento suficiente porque el promedio pertenece al intervalo [11-13].

EI5: Se observa en el gráfico N° 03, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 14,0 puntos, llegando a un rendimiento satisfactorio dado que el promedio pertenece al intervalo [14-18]; el cuál demuestra que la enseñanza-aprendizaje con el uso del material didáctico algeplano, en la representación de una ecuación cuadrática en forma de binomio al cuadrado con término y sin término independiente, fue satisfactorio porque el material didáctico permitió a crear cuadrados perfectos con las mismas dimensiones. Mientras las alumnas del grupo control tienen muchas dificultades, en representar una ecuación cuadrática, en forma de binomio al cuadrado con término y sin término independiente, obteniendo un promedio de 10,9 puntos, llegando a un rendimiento suficiente porque el promedio pertenece al intervalo [11-13].

Gráfico N° 04: Comparación de los promedios generales en la representación de una ecuación cuadrática.



En el gráfico N° 04, se realiza la comparación de los promedios obtenidos de la representación de los diferentes tipos o formas de ecuaciones cuadráticas, en donde se observa al grupo experimental, con un promedio de *14,4 puntos* y una desviación estándar de *1,62*. Asimismo se observa al grupo control, con un promedio de *11,7* *puntos* y una desviación estándar de 2,36. Esto nos indica lo siguiente: las alumnas que llevan el proceso de aprendizaje, con el apoyo del material didáctico algeplano (grupo experimental), muestran mayor motivación, predisposición y participación activa en el estudio y aprendizaje, de los temas desarrollados sobre representación de ecuaciones cuadráticas, así llegando a un *rendimiento satisfactorio* dado que el promedio general pertenece al intervalo [14-18] y por el logro de los objetivos propuestos a diferencia de las alumnas del grupo control, que sus participaciones y aprendizajes fueron limitados, llegando a un *rendimiento suficiente* dado que el promedio general pertenece al intervalo [11,13], ver (*anexo Nº 6-7*).

Con el cuál concluimos que la representación de las ecuaciones cuadráticas, con el uso del material didáctico algeplano es efectiva y contribuye en el aprendizaje significativo de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay - 2010.

4.1.4. Resultados de la resolución de ecuaciones cuadráticas

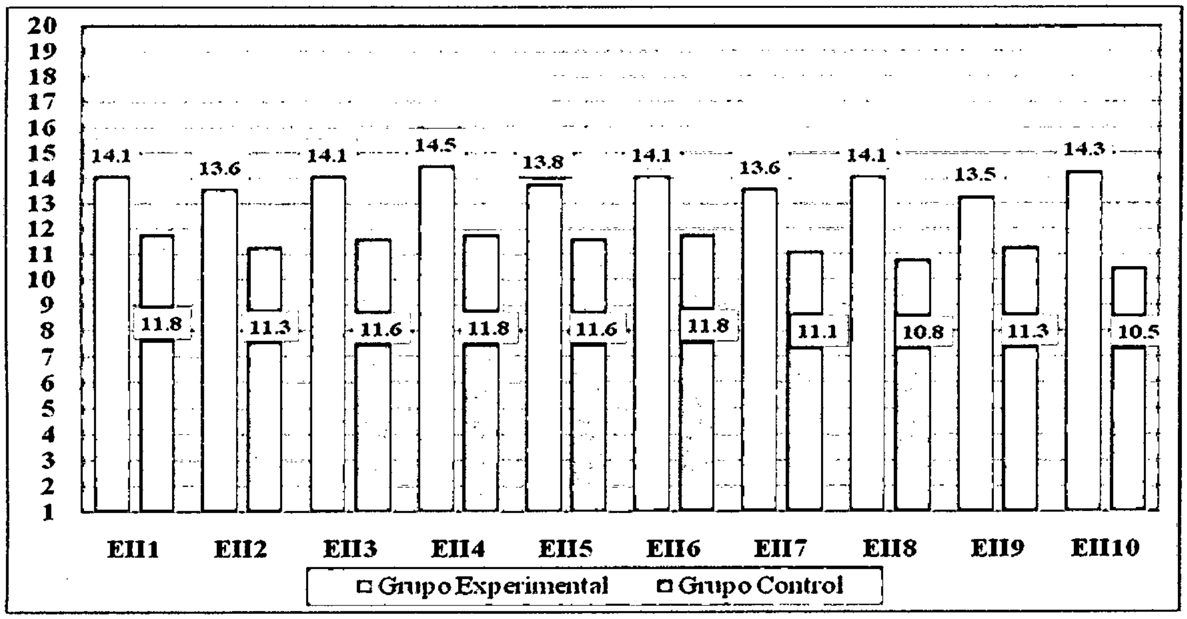
En el siguiente gráfico se muestra los resultados de los promedios obtenidos, de los dos grupos sobre la resolución de ecuaciones cuadráticas, dichos resultados fueron recogidos durante las sesiones didácticas mediante la lista de cotejos.

Tabla N° 04: Comparación de los resultados, de los dos grupos, en la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Indicadores de evaluación en la resolución de ecuaciones cuadráticas	Grupo experimental		Grupo control	
	Puntaje alcanzado	Promedio Alcanzado	Puntaje alcanzado	Promedio Alcanzado
EII1=Comprueba si las soluciones de una ecuación cuadrática son correctas o incorrectas.	59	14.1	45	11.8
EII2=Resuelve una ecuación cuadrática incompleta.	57	13.6	43	11.3
EII3=Determina la suma de las raíces de una ecuación cuadrática.	59	14.1	44	11.6
EII4 = Determina el producto de las raíces de una ecuación cuadrática.	61	14.5	45	11.8
EII5= Forma una ecuación cuadrática dada sus raíces.	58	13.8	44	11.6
EII6=Resuelve una ecuación cuadrática en forma factorizada.	59	14.1	45	11.8
EII7= Resuelve una ecuación cuadrática en forma de binomio al cuadrado.	57	13.6	42	11.1
EII8=Resuelve una ecuación cuadrática completando cuadrados.	59	14.1	41	10.8
EII9 = Resuelve una ecuación cuadrática con la formula general	56	13.5	43	11.3
EII10 = Resuelve problemas de ecuaciones cuadráticas aplicadas a la vida cotidiana.	60	14.3	40	10.5
Promedio general		14,0		11,3

FUENTE: Elaboración propia de los resultados de la lista de cotejo.

Gráfico N° 05: Comparación de los promedios alcanzados, en los diferentes indicadores en la resolución de ecuaciones cuadráticas.



Interpretacion del gráfico Nº 05:

EII1: Se observa en el gráfico Nº 05, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 14,1 puntos, llegando a un rendimiento satisfactorio dado que el promedio pertenece al intervalo [14-18]; el cuál demuestra que la enseñanza-aprendizaje, con el uso del material didáctico algeplano, les facilita comprobar las soluciones de una ecuación cuadrática son correctas o incorrectas. Mientras las alumnas del grupo control tienen muchos conflictos, en comprobar las soluciones de una ecuación cuadrática, obteniendo un promedio de 11,8 puntos, llegando a un rendimiento suficiente porque el promedio pertenece al intervalo [11-13].

EII2: Se observa en el gráfico Nº 05, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 13,6 puntos, llegando a un rendimiento satisfactorio, dado que el promedio pertenece al intervalo [14-18]; el cuál demuestra que la enseñanza-aprendizaje, con el uso del material didáctico algeplano, les facilita resolver una ecuación cuadrática completa e incompleta formando rectángulos y cuadrados creando una ecuación mas simple. Mientras las alumnas del grupo control tienen muchas dificultades, en resolver una ecuación cuadrática completa e incompleta porque carecen de conocimiento previos para resolverlo y tienden a memorizar equívocamente las formulas, obteniendo un promedio de 11,3 puntos, llegando a un rendimiento suficiente porque el promedio pertenece al intervalo [11-13].

EII3: Se observa en el gráfico Nº 05, que las alumnas del grupo experimental, obtienen un promedio de 14,1 puntos, llegando a un rendimiento satisfactorio dado que el promedio pertenece al intervalo [14-18]; el cuál demuestra que la enseñanza-aprendizaje, con el uso del material didáctico algeplano, les facilita determinar la suma de las raíces de una ecuación cuadrática, porque el material didáctico permite a observar y manipular la ecuación cuadrática; mientras las alumnas del grupo control tienen muchas dificultades, en determinar la suma de las raíces de una ecuación cuadrática, porque tienen dificultades en realizar las operaciones algebraicas, obteniendo un promedio de 11,6 puntos, llegando a un rendimiento suficiente porque el promedio pertenece al intervalo [11-13].

EII4: Se observa en el gráfico N° 05, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 14,5 puntos, llegando a un rendimiento satisfactorio dado que el promedio pertenece al intervalo [14-18]; el cuál demuestra que la enseñanza-aprendizaje, con el uso del material didáctico algeplano, les facilita determinar el producto de las raíces de una ecuación cuadrática, porque el material didáctico permite observar y manipular la ecuación cuadrática; mientras las alumnas del grupo control tienen muchas dificultades, en determinar el producto de las raíces de una ecuación cuadrática, obteniendo un promedio de 11,8 puntos, llegando a un rendimiento suficiente porque el promedio pertenece al intervalo [11-13].

EII5: Se observa en el gráfico N° 05, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 13,8 puntos, llegando a un rendimiento satisfactorio dado que el promedio pertenece al intervalo [14-18]; el cuál demuestra que la enseñanza-aprendizaje, con el uso del material didáctico algeplano, les facilita formar una ecuación cuadrática dada sus raíces. Mientras las alumnas del grupo control tienen muchas dificultades, en formar una ecuación cuadrática dada sus raíces, por falta de conocimientos previos en las operaciones básicas, obteniendo un promedio de 11,6 puntos, llegando a un rendimiento suficiente porque el promedio pertenece al intervalo [11-13].

EII6: Se observa en el gráfico N° 05, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 14,1 puntos, llegando a un rendimiento satisfactorio dado que el promedio pertenece al intervalo [14-18]; el cuál demuestra que la enseñanza-aprendizaje, con el uso del material didáctico algeplano, les facilita resolver una ecuación cuadrática formando rectángulos y/o cuadrados en forma concreta, creando una ecuación factorizada mas simple; luego se realiza procedimientos algebraicos para dar solución. Mientras las alumnas del grupo control tienen muchas dificultades, en encontrar los factores de una ecuación cuadrática, obteniendo un promedio de 11,8 puntos, llegando a un rendimiento suficiente porque el promedio pertenece al intervalo [11-13].

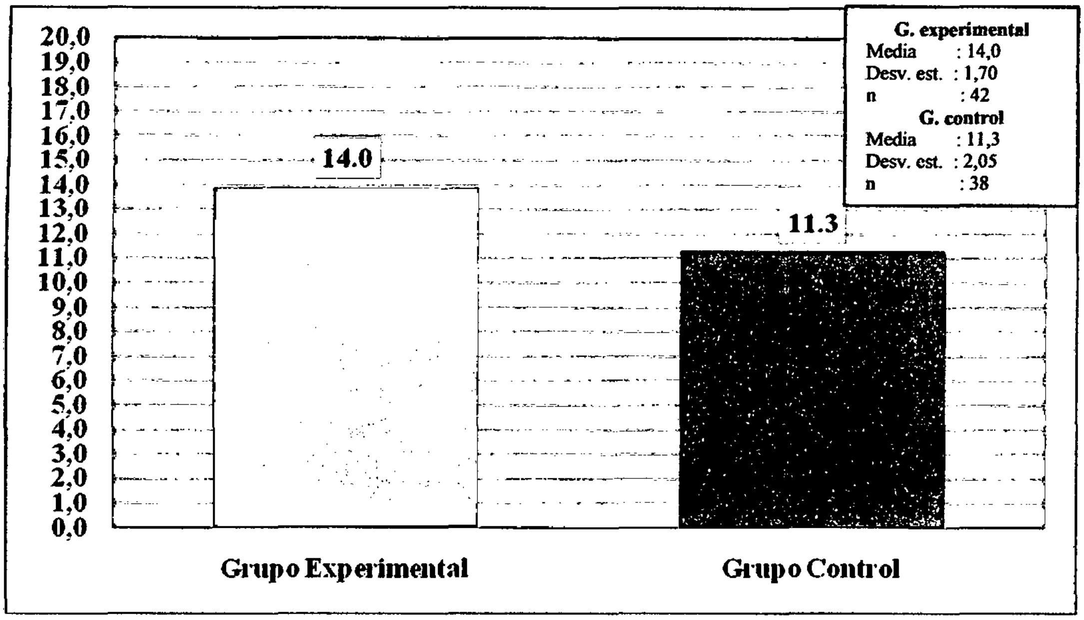
EII7: Se observa en el gráfico N° 05, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 13,9 puntos, llegando a un rendimiento satisfactorio dado que el promedio pertenece al intervalo [14-18]; el cuál demuestra que la enseñanza-aprendizaje, con el uso del material didáctico algeplano, les facilita crear cuadrados perfectos con las mismas dimensiones; luego se realiza procedimientos algebraicos para dar solución. Mientras las alumnas del grupo control tienen muchas dificultades en resolver una ecuación cuadrática, en forma de binomio al cuadrado por falta de conocimientos previos y practica permanente, obteniendo un promedio de 11,1 puntos, llegando a un rendimiento suficiente porque el promedio pertenece al intervalo [11-13].

EII8: Se observa en el gráfico N° 05, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 14,1 puntos, llegando a un rendimiento satisfactorio dado que el promedio pertenece al intervalo [14-18]; el cuál demuestra que la enseñanza-aprendizaje, con el uso del material didáctico algeplano, les facilita representar geométricamente completando cuadrados; luego para dar solución se realiza procedimientos algebraicos. Mientras las alumnas del grupo control tienen muchas dificultades, en resolver una ecuación cuadrática completando cuadrados dado que el procedimiento es extenso para dar una solución correcta, obteniendo un promedio de 10,8 puntos, llegando a un rendimiento suficiente porque el promedio pertenece al intervalo [11-13].

EII9: Se observa en el gráfico N° 05, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 13,5 puntos, llegando a un rendimiento satisfactorio dado que el promedio pertenece al intervalo [14-18]; el cuál demuestra que la enseñanza-aprendizaje, con el uso del material didáctico algeplano, les facilita resolver una ecuación cuadrática con la formula general, porque el material didáctico permite a observar y manipular la ecuación cuadrática; mientras las alumnas del grupo control tienen dificultades en resolver una ecuación cuadrática con la formula general, obteniendo un promedio de 11,3 puntos, llegando a un rendimiento suficiente porque el promedio pertenece al intervalo [11-13].

EII10: Se observa en el gráfico N° 05, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 14,3 puntos, llegando a un rendimiento satisfactorio dado que el promedio pertenece al intervalo [14-18]; el cuál demuestra que la enseñanza-aprendizaje, con el uso del material didáctico algeplano, le facilita resolver problemas aplicadas a la vida cotidiana, porque el material didáctico permite a observar y manipular las variables. Mientras las alumnas del grupo control tienen dificultades en resolver problemas de ecuaciones cuadráticas, aplicadas a la vida cotidiana, obteniendo un promedio de 10,5 puntos, llegando a un rendimiento suficiente por que el promedio pertenece al intervalo [11-13].

Gráfico Nº 06: Comparación de los promedios generales en la resolución de una ecuación cuadrática.



En el *gráfico Nº 06*, se realiza la comparación de los promedios obtenidos de la resolución de una ecuación cuadrática con una incógnita, en donde se observa al grupo experimental, con un promedio de *14,0 puntos* y una desviación estándar de *1,70.* Asimismo, se observa al grupo control con un promedio de *11,3 puntos* y una desviación estándar de *2,05*, por lo tanto, las alumnas del grupo experimental demuestran mayor motivación, predisposición, participación activa en el estudio y aprendizaje en la resolución de ecuaciones cuadráticas y obteniendo un *rendimiento satisfactorio*, dado que el promedio general pertenece al intervalo *[14-18],* a diferencia de las alumnas del grupo control, tienen dificultades en resolver una ecuación cuadrática, llegando a un *rendimiento suficiente* dado que el promedio general pertenece al intervalo *[11-13]* ver (*anexo Nº 8-9*).

Con el cual concluimos que la resolución de ecuaciones cuadráticas, con el apoyo del material didáctico algeplano, mejora el aprendizaje significativo de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay - 2010.

4.1.5. Resultado de las actitudes de las alumnas hacia el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas.

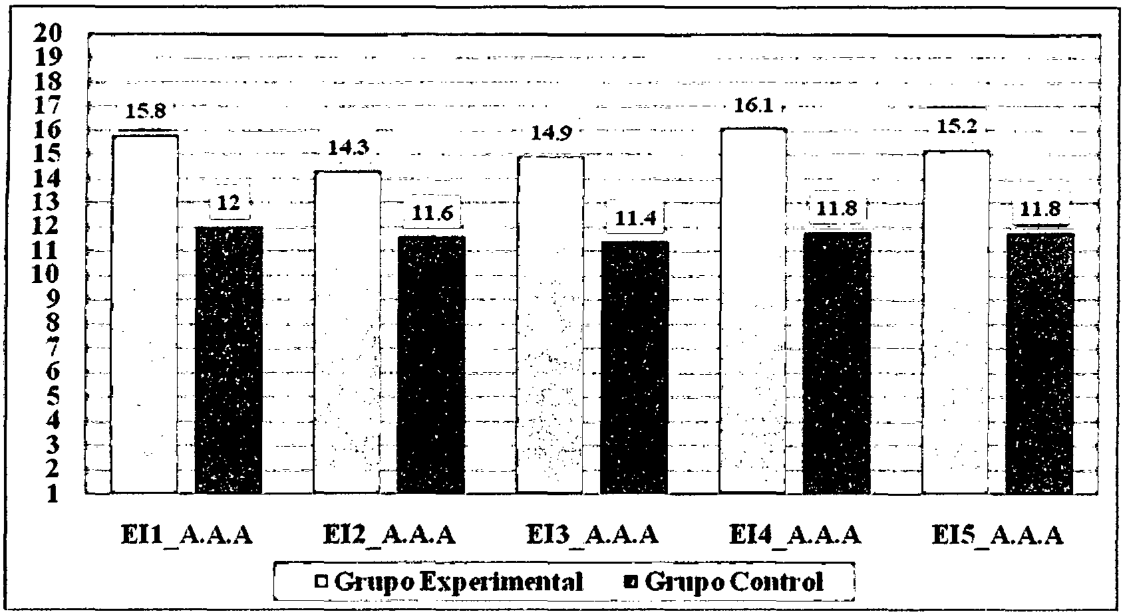
En la siguiente tabla N° 05, se muestra los resultados, de los promedios obtenidos de los dos grupos sobre las actitudes de las alumnas hacia el aprendizaje de ecuaciones cuadráticas, dichos resultados fueron recogidos durante las sesiones didácticas, mediante la lista de cotejos.

Tabla N° 05. Comparación de los resultados de las actitudes de las alumnas hacia el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas.

Indicadores de las actitudes	[redacted]			
	Puntaje alcanzado	**Promedio alcanzado**	**Puntaje alcanzado**	**Promedio Alcanzado**
EI1_A.A.A: Muestra empeño al realizar y presentar sus tareas.	**133**	**15.8**	**91**	**12.0**
EI2 _A.A.A: Toma la iniciativa en las actividades desarrolladas.	**120**	**14.3**	**88**	**11.6**
EI3_A.A.A: Consulta frecuentemente.	**125**	**14.9**	**87**	**11.4**
EI4_A.A.A: Muestra interés y motivación hacia el aprendizaje de las E.C.	**135**	**16.1**	**90**	**11.8**
EI5_A.A.A: Es perseverante en el desarrollo de los ejercicios.	**128**	**15.2**	**90**	**11.8**
Promedio general		**15,3**		**11,7**

FUENTE: Elaboración propia de los resultados de la lista de cotejo.

Grafico N° 07: Comparación de los promedios alcanzados, en las diferentes actitudes de las alumnas hacia el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas.



Interpretación del gráfico N° 07

EI1_A.A.A: Se observa en el gráfico N° 07, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 15,8 puntos, el cuál demuestra que las alumnas muestran empeño al realizar y presentar sus tareas y una actitud positiva hacia las ecuaciones cuadráticas, con el uso del material didáctico algeplano. Mientras las alumnas del grupo control demuestran el desinterés al realizar y presentar sus tareas por la falta de motivación y uso de material didáctico, obteniendo un promedio de 12,0 puntos.

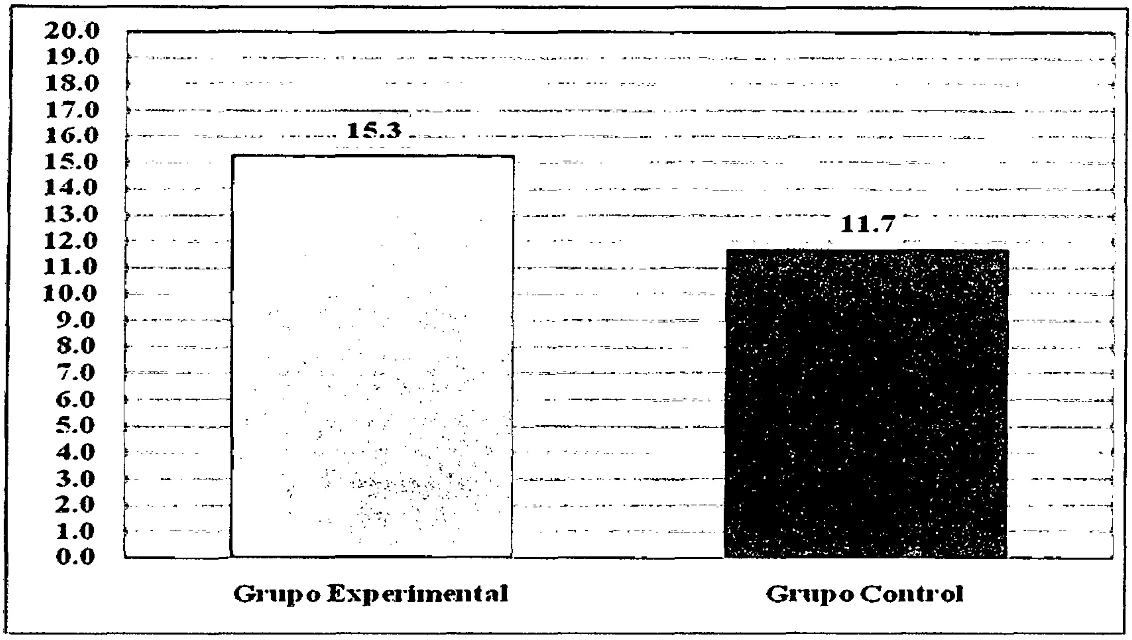
EI2 _A.A.A: Se observa en el gráfico N° 07, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 14,3 puntos, el cuál demuestra que las alumnas muestran empeño y toman la iniciativa en las actividades desarrolladas y una actitud positiva hacia las ecuaciones cuadráticas con el uso del material didáctico algeplano; mientras las alumnas del grupo control demuestran el desinterés, en las actividades desarrolladas por la falta de motivación y uso de material didáctico, obteniendo un promedio de 11,6 puntos.

EI3_A.A.A: Se observa en el gráfico Nº 07, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 14,9 puntos, el cuál demuestra que las alumnas son participativas en las actividades desarrolladas, en forma permanente mediante consultas frecuentes con una actitud positiva hacia las ecuaciones cuadráticas, con el uso del material didáctico algeplano; mientras las alumnas del grupo control demuestran una actitud pasiva y conformistas a falta de motivación y uso de material didáctico, obteniendo un promedio de 11,4 puntos.

EI4_A.A.A: Se observa en el gráfico Nº 07, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 16,1 puntos, el cuál demuestra que las alumnas son participativas, demuestran el interés y la motivación hacia el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas, con una actitud positiva mediante el uso del material didáctico algeplano; mientras las alumnas del grupo control demuestran una actitud pasiva y conformistas por la falta de motivación y uso de material didáctico, obteniendo un promedio de 11,8 puntos.

EI5_A.A.A: Se observa en el gráfico Nº 07, que las alumnas del grupo experimental obtienen un promedio de 15,2 puntos, el cuál demuestra que las alumnas son perseverantes en el desarrollo de los ejercicios, con una actitud positiva mediante el uso del material didáctico algeplano; mientras las alumnas del grupo control demuestran una actitud pasiva y desinterés en el desarrollo de los ejercicios, a falta de motivación y uso de material didáctico, obteniendo un promedio de 11,8 puntos.

Gráfico N° 08: Comparación de los promedios generales sobre las actitudes de las alumnas hacia el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas.



En el *gráfico N° 08*, se realiza la comparación de los promedios generales sobre las actitudes de las alumnas hacia el aprendizaje, de las ecuaciones cuadráticas, en donde se observa al grupo experimental, con un promedio de *15,3 puntos*. Asimismo se observa al grupo control con un promedio de *11,7 puntos*. Esto nos indica lo siguiente: El material didáctico algeplano, permitió a las alumnas del grupo experimental a desenvolverse de una manera más activa, participativa y motivadora en la representación y resolución de ecuaciones cuadráticas, a diferencia de las alumnas del grupo control tienen poca participación en las diferentes actividades desarrolladas durante el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas, ver (*anexo N° 8-9*).

Con el cual concluimos que las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay, demuestran actitudes positivas para el logro del aprendizaje significativo de las ecuaciones cuadráticas con el uso del material didáctico algeplano.

4.1.6. Prueba de salida

Se tomó en la penúltima semana del mes de julio, después de haber concluído el dictado y estudio de la unidad de ecuaciones cuadráticas para ambos grupos.

- Para conocer el aprendizaje logrado respecto a las ecuaciones cuadráticas, con las alumnas del grupo experimental, que estudiaron el tema utilizando el material didáctico algeplano, y las alumnas del grupo control que estudiaron la unidad didáctica utilizando el método tradicional (expuesta por el profesor).

- Para comparar el nivel de conocimiento de la unidad de ecuaciones cuadráticas entre las alumnas integrantes del grupo experimental y grupo control.
- Para deducir la confirmación o no de nuestra hipótesis de trabajo planteada con antelación y luego inferir conclusiones conducentes a la viabilidad del trabajo.
- Para determinar el nivel de logro de los objetivos y metas propuestas en el estudio de la enseñanza de ecuaciones cuadráticas, con el uso del material didáctico algeplano y emitir juicios válidos con miras a lograr un aprendizaje significativo del tema mencionado.

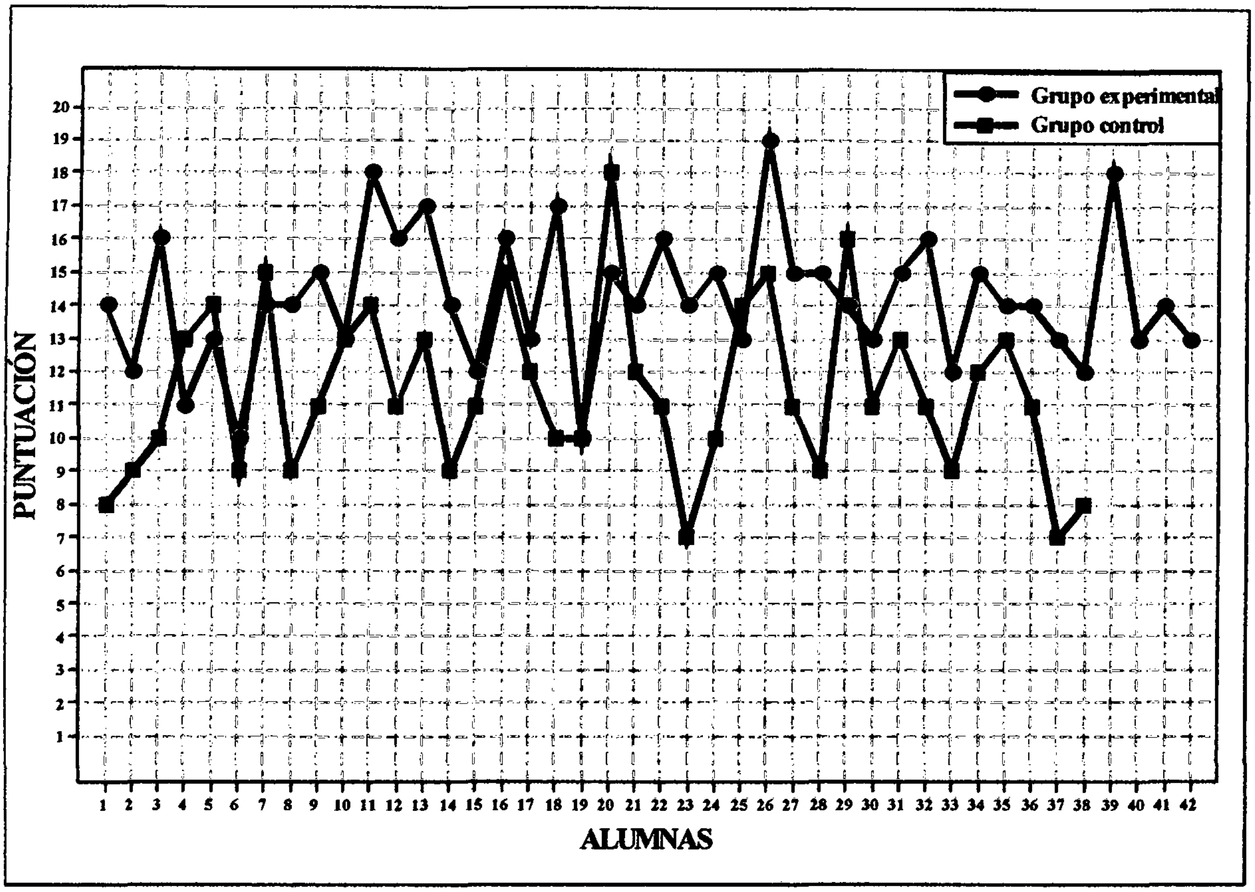
a) Análisis estadístico de los resultados de la prueba de salida

Tabla N° 06: Resumen estadístico de la prueba de salida.

	3ro. Grado "C" (Grupo experimental)	**3ro. Grado "D" (Grupo control)**
N° de alumnas	42	38
Nota mayor	19	18
Nota menor	10	7
Rango	09	11
Promedio	14,2	11,4
Varianza	4,03	6,58
Desviación estándar	2,01	2,56
Coeficiente de variación	14,1 %	22,5 %

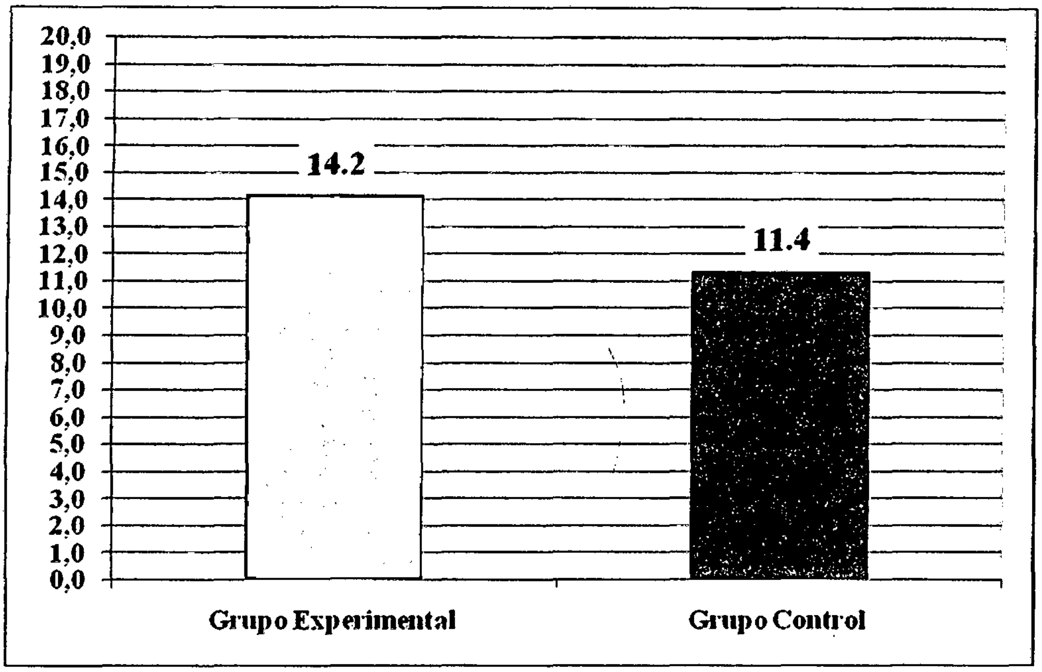
FUENTE: Elaboración propia de resultados de la prueba final.

Gráfico N° 09: Resultados de la prueba de salida del grupo experimental y grupo control.



En el gráfico N° 09, se observa los puntajes obtenidos de las alumnas en la prueba de salida. Ésta nos da la información de los aprendizajes, logrados respecto a las ecuaciones cuadráticas de las alumnas del grupo experimental que estudiaron el tema utilizando el material didáctico algeplano, y las alumnas del grupo control que estudiaron la unidad didáctica utilizando el método tradicional.

Gráfico Nº 10: Comparación de los promedios generales de la prueba de salida.



Observando la *tabla Nº 06* y los *gráficos Nº 09* y *Nº 10*, se analiza los resultados obtenidos de la prueba de salida del grupo experimental y grupo control de la siguiente forma.

En la sección "C", de tercer grado se obtuvo *19 puntos* como calificativo mayor y como calificativo menor *10 puntos*; mientras en la sección "D" de tercer grado se obtuvo *18 puntos* como calificativo mayor y como calificativo menor *07 puntos*, además, el promedio general de los calificativos obtenidos en tercero "C" es de *14,2 puntos*, mientras en tercero "D" es de *11,4 puntos,* el coeficiente de variación de las notas de las secciones son *0, 14* y *0, 22* respectivamente, la diferencia entre los coeficientes de variación es significativa ver (*anexo Nº 05*).

Estos resultados confirman que las alumnas del grupo experimental, obtuvieron un rendimiento satisfactorio en el proceso de enseñanza-aprendizaje, de las ecuaciones cuadráticas con el uso del material didáctico algeplano, dado que el promedio general de todas las alumnas pertenece al intervalo de [14 - 18]; mientras tanto las alumnas del grupo control obtuvieron un rendimiento suficiente dado que el promedio general pertenece al intervalo de [11 - 13], evidenciada en la prueba de salida.

Tabla N° 07: Resumen de resultados de la prueba de entrada y salida de ambos grupos.

Cuadro comparativo de los promedios y la variación			
	Grupo experimental	Grupo control	Variación
Prueba de entrada	**8,6**	**8,4**	**0,2**
Prueba de salida	**14,2**	**11,4**	**2,8**
Variación	**5,6**	**3,0**	

Fuente: Elaboración propia (resultados de la prueba de entrada y salida).

b) Procedimiento de la prueba de hipótesis

Según MASON // LIND// MARCHAL, (2001), "*existe un procedimiento de cinco pasos que sistematiza la prueba de hipótesis, al llegar al paso 5, se tiene ya la capacidad de tomar la decisión de rechazar o no la hipótesis*"[49]. Teniendo en cuenta estos procedimientos realizaremos la prueba de nuestra hipótesis.

Paso 1: Plantear la hipótesis nula (H_0) y la hipótesis alternativa (H_1). Para someter a contraste una hipótesis es necesario, formular la hipótesis alternativa (H_1) e hipótesis nula (H_0).

Hipótesis nula (H_0):

Con el uso adecuado del material didáctico algeplano, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas (**u_1**), **no se logra** un aprendizaje significativo (**u_2**), en las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay – 2010.

Expresado formalmente está dado por **H_0: $u_1 \leq u_2$**

[49] MASON, R.; LIND, D. & MARCHAL, W. (2001). *Estadística para Administración y Economía*. México, D.F.: Alfa Omega.

Hipótesis alterna (H_1):

Con el uso adecuado del material didáctico algeplano, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas **(u_1), se logra** un aprendizaje significativo **(u_2)** en las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay – 2010.

Expresado formalmente está dado por **H_1: $u_1 > u_2$**

Paso 2: Selección del nivel de significación: el nivel de significación es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula, cuando es verdadera, a esto se le denomina Error tipo 1, algunos autores utilizan el término nivel de riesgo, en lugar de nivel de significación. A este nivel de riesgo se le denota mediante la letra griega alfa (α). Para efectos de la presente investigación se ha determinado: α =0,05.

Paso 3: Escoger el valor estadístico de prueba: como las muestras son grandes (n_2 y n_4 son mayores que 30). El estadístico de prueba se obtiene a través de la formula:

$Z = \dfrac{\overline{y}_2 - \overline{y}_4}{\sqrt{\dfrac{S_2^2}{n_2} + \dfrac{S_4^2}{n_4}}}$, cuya distribución consideramos aproximadamente normal estandarizado N (0,1).

Paso 4: Formular la regla de decisión : una regla de decisión es un enunciado de las condiciones según las que se aceptan o rechazan la hipótesis nula, para el cuál es imprescindible determinar el valor critico, que es un número que divide la región de aceptación y la región de rechazo. Para α = 0,05 y una prueba unilateral de cola a la derecha, para la distribución Z, teniendo en cuenta $z_{1-\alpha} = z_{1-0,05} = z_{0,95} = 1,645$ se obtiene la región critica. La región crítica de rechazo de la hipótesis nula es: $R.C. = \{Z > 1,645\}$ y de aceptación de la hipótesis nula es $R.A. = \{Z \leq 1,645\}$.

Pasó 5: Toma de decisión: considerando los estadígrafos ya calculados se toma la decisión de aceptar o no la hipótesis nula, con los datos que se presentan en la tabla.

Tabla N° 08: Resumen estadístico para prueba de hipótesis

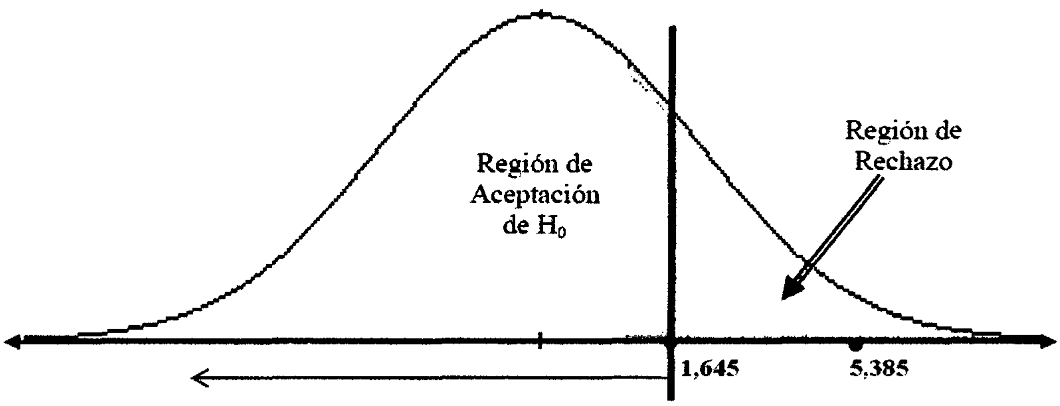
Grupos	n	$\bar{y}$	S^2
Grupo Experimental	$n_2 = 42$	14,2	$S_2^2 = 4,03$
Grupo Control	$n_4 = 38$	11,4	$S_4^2 = 6,58$

FUENTE: Elaboración propia (datos extraídos de la tabla N° 6)

Realizando las operaciones correspondientes tenemos el siguiente resultado.

$$Z = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_4}{\sqrt{\frac{S_2^2}{n_2} + \frac{S_4^2}{n_4}}} = \frac{14,2 - 11,4}{\sqrt{\frac{4,03}{42} + \frac{6,58}{38}}} = \frac{2,8}{\sqrt{0,27}} = 5,385 \text{. (Z calculada)}$$

Gráfico N° 11: Aceptación o rechazo de la hipótesis



Como Z calculada: $Z = 5,385 > 1,645$ se rechaza la hipótesis nula H_0 y se acepta la hipótesis alternativa H_1, que a la letra dice:

Con el uso adecuado del material didáctico algeplano, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas, se logra un aprendizaje significativo en las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay – 2010.

4.1.7. Resultado del cuestionario de tipo lickert, hacia la enseñanza-aprendizaje de ecuaciones cuadráticas con el uso del material didáctico algeplano

Para complementar el estudio sobre el uso del material didáctico algeplano en la enseñanza- aprendizaje de ecuaciones cuadráticas, se aplicó un cuestionario tipo lickert a las alumnas del grupo experimental, donde indica los siguientes resultados.

Nota. *Es un estudio complemento sobre el material didáctico utilizado.*

Tabla Nº 09: Resultados obtenidos del cuestionario aplicado a las (42) alumnas sobre el uso del material didáctico algeplano en temas de ecuaciones cuadráticas.

REACTIVOS	***RESPUESTAS Y PORCENTAJES***					**Total**
	Totalmente de acuerdo	De acuerdo	Neutro	En desacuerdo	Totalmente desacuerdo	
1. Te gustó trabajar ecuaciones cuadráticas con el uso del material didáctico algeplano.	31	9	0	1	1	42
	73.8 %	21.4 %	0.0 %	2.4 %	2.4 %	100 %
2. Los algeplanos te ayudaron a entender mejor las ecuaciones cuadráticas.	27	15	0	0	0	42
	64.3 %	35.7 %	0.0 %	0.0 %	0.0 %	100 %
3. Representar y resolver ecuaciones cuadráticas con el material didáctico algeplano, es fácil.	25	16	1	0	0	42
	59.5 %	38.1 %	2.4 %	0.0 %	0.0 %	100 %
4. Aprendes más con éste método de trabajo.	33	7	2	0	0	42
	78.6 %	16.7 %	4.8 %	0.0 %	0.0 %	100 %
5. Es más interesante las clases de ecuaciones cuadráticas con el uso del algeplano.	23	14	4	0	1	42
	54.8 %	33.3 %	9.5 %	0.0 %	2.4 %	100 %
6. Estas en la capacidad de representar geométricamente y resolver ecuaciones cuadráticas, utilizando el material didáctico algeplano.	18	20	2	1	1	42
	42.9 %	47.6 %	4.8 %	2.4 %	2.4 %	100 %
7. Las ecuaciones cuadráticas es fácil de entender con el uso del material didáctico algeplano.	33	6	3	0	0	42
	78.6 %	14.3 %	7.1 %	0.0 %	0.0 %	100 %
8. Les recomendarías a otras compañeras (os), el uso del material didáctico algeplano.	31	9	2	0	0	42
	73.8 %	21.4 %	4.8 %	0.0 %	0.0 %	100 %
Total	**221**	**96**	**14**	**2**	**3**	**336**

FUENTE: Resultados del cuestionario aplicado a las alumnas del grupo experimental (elaboración propia).

Interpretación de los resultados:

1. Te gustó trabajar ecuaciones cuadráticas con el uso del material didáctico algeplano: El 73.8% consideran que están totalmente de acuerdo trabajar ecuaciones cuadráticas, con el uso del material didáctica algeplano, el 2.4% opinan que están totalmente en desacuerdo; es decir la mayoría de las alumnas resaltan la importancia de trabajar las ecuaciones cuadráticas y la matemática, utilizando materiales didácticos y la consideración que están en desacuerdo, esta relacionado con la enseñanza del docente.

2. Los algeplanos te ayudaron a entender mejor las ecuaciones cuadráticas: El 64.3% manifiestan que están totalmente de acuerdo con el uso del material didáctico algeplano, porque ayudó a entender mejor las ecuaciones cuadráticas, en sus aprendizajes, el 35.7% también están de acuerdo con el apoyo del material didáctico algeplano. Por lo tanto se observa con objetividad que el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas esta relacionado con el uso de los algeplanos.

3. Representar y resolver ecuaciones cuadráticas con el material didáctico algeplano, es fácil: El 59.5% manifiestan que están totalmente de acuerdo con su viabilidad del material en la resoluciones de ecuaciones cuadráticas, el 38.1% también están de acuerdo con la viabilidad del material didáctico algeplano, a una oposición del 0.1%. Esto quiere decir, representar y resolver ecuaciones cuadráticas, es fácil, utilizando el material didáctico algeplano y esta orientado a mejorar fundamentalmente el aprendizaje de las alumnas.

4. Aprendes más con éste método de trabajo: El 78.6% manifiestan que este método de trabajo es mas dinámico, participativo y cooperativo en la representación y resolución de ecuaciones cuadráticas con el uso del material didáctico algeplano, el

4.8% opinan en forma neutral, no es el método más adecuado para lograr su aprendizaje. Es decir la mayoría de las alumnas resaltan la importancia del trabajo con una nueva estrategia.

5. Es más interesante las clases de ecuaciones cuadráticas con el uso del algeplano: El 54.8% de las alumnas consideran que es la forma de trabajo más acertada, con nuevas estrategias, mayor dinámica y participación en clase, el 2.4% opinan que están totalmente en desacuerdo, con la forma de trabajo. La enseñanza utilizando nuevas estrategias y materiales didácticos, siempre está orientado a mejorar y plasmar un aprendizaje eficaz de la matemática

6. Estas en la capacidad de representar geométricamente y resolver ecuaciones cuadráticas, utilizando el material didáctico algeplano: El 42.9% están totalmente de acuerdo, el 47.4% están de acuerdo y en la capacidad de representar geométricamente y resolver ecuaciones cuadráticas, utilizando el material didáctico algeplano, el 2.4% opinan que están totalmente en desacuerdo en resolver y realizar operaciones de ecuaciones cuadráticas, utilizando el material didáctico algeplano. Esto quiere decir que la mayoría de las alumnas están en la capacidad de representar y resolver ecuaciones cuadráticas, utilizando el material didáctico algeplano.

7. Las ecuaciones cuadráticas es fácil de entender con el uso del material didáctico algeplano: el 78.6% de las alumnas manifiestan, para lograr un aprendizaje significativo y duradero de las ecuaciones cuadráticas, es representando con materiales manipulativos siendo más fácil de entender para lograr un aprendizaje.

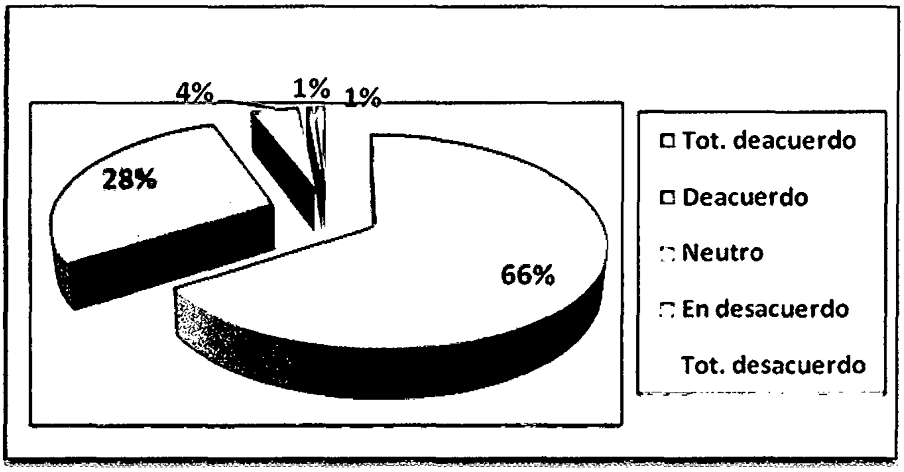
8. Les recomendarías a otras compañeras(os) el uso del material didáctico algeplano: El 73.8% de las alumnas consideran que el material didáctico algeplano es interesante y un medio de apoyo en sus aprendizajes, de las ecuaciones cuadráticas y por lo tanto es recomendable el material para otras compañeras.

Tabla Nº 10: Resumen de los resultados obtenidos del cuestionario

Actitudes de las alumnas, hacia el uso del material didáctico algeplano	f_i	%
Totalmente de acuerdo	221	65.77
De acuerdo	96	28.57
Neutro	14	4.16
En desacuerdo	2	0.59
Totalmente desacuerdo	3	0.89
TOTAL	336	100

FUENTE: Elaboración propia de los resultados obtenidos del cuestionario.

Gráfico Nº 12. Actitudes de las alumnas, hacia el uso del material didáctico algeplano



En el gráfico Nº 12, se observa las "actitudes de las alumnas, hacia el uso del material didáctico algeplano en la enseñanza de ecuaciones cuadráticas" del tercer grado, sección "C", de la I.E. Aurora Inés Tejada, en la cual se observa que el 66% de las alumnas indican que están *"totalmente de acuerdo"* con el uso del material didáctico algeplano, en la enseñanza de ecuaciones cuadráticas, a si mísmo se observa que el 28% de las alumnas están *"de acuerdo"* con el uso del material didáctico algeplano.

Por lo tanto estos resultados ratifican y fortalecen el uso positivo del material didáctico algeplano en la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas, creando un ambiente dinámico, participativo de las alumnas durante las sesiones didácticas y logrando aprendizaje significativo.

4.2. DISCUSIÓN Y RESULTADOS

Validez interna: El trabajo de investigación es válida internamente, por que los resultados obtenidos están fuera de sesgo, debido a que hubo un control efectivo de las fuentes de error experimental, y de otras variables extrañas la cual ha contribuido a una mayor validez interna del proceso de experimentación, hecho que condujo a que:

- Las alumnas del grupo experimental lograron un aprendizaje significativo, con el uso del material didáctico algeplano, en el proceso de la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas, consiguiendo un *rendimiento satisfactorio,* dado que el promedio general de todas las alumnas pertenece al rango de [14 - 18]; mientras tanto las alumnas del grupo control obtuvieron un rendimiento suficiente dado que el promedio general pertenece al rango de [11 - 13], evidenciada en la prueba de salida
- El promedio de la evaluación del grupo experimental en la representación de ecuaciones cuadráticas es 14,4, en la resolución de ecuaciones cuadráticas es 14,0 y las actitudes de las alumnas hacia el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas es 15,2. Mientras en el grupo control en la representación de ecuaciones cuadráticas es 11,8, en la resolución de ecuaciones cuadráticas es 11,3 y las actitudes de las alumnas hacia el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas es 11,8. La cuál por diferencia de medias ratifica nuestra hipótesis de trabajo, al aceptarse la hipótesis alterna.
- La varianza del grupo experimental es 4,03 y del grupo de control 6,58; ello significa que en el grupo de control existe mayor dispersión de datos (calificativos) respecto a la media aritmética, evidenciada en la prueba de salida.

- El coeficiente de variación del grupo experimental es de 14,1% y el del grupo de control es del 22,5%; la que significa que los calificativos del grupo experimental, son más homogéneos o tiene menor variabilidad que los calificativos obtenidos en el grupo de control; evidenciada en la prueba de salida.
- La investigación realizada y los resultados logrados se enmarcan dentro de una perspectiva teórica, metodológica y didáctica tendiente a dinamizar el aprendizaje, utilizado el material didáctico algeplano, con una guía teórica y práctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas.

Validez externa: *¿Cómo generalizamos los hallazgos y resultados de la investigación*?
La población de estudio está constituída por las 164 alumnas del tercer grado de secundaria de la Institución Educativa Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay, que presentan las mismas características a los grupos estudiados. Por lo tanto la validez de nuestra investigación se puede proyectar a toda las Instituciones Educativas que guarden cierta similitud con la Institución Educativa, donde se hizo el estudio experimental.

CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos en el proceso de investigación, podemos concluir:

1. El uso del material didáctico algeplano, permite a las alumnas conjugar los conocimientos de álgebra y geometría elemental de los grados anteriores, creando un estudio metódico de las ecuaciones cuadráticas representando e identificando los términos, las dimensiones, los signos, la variable, etc., para fortalecer sus capacidades de intuición y abstracción, con la participación activa dado su carácter lúdico, desafiante y vinculado con el mundo natural ofreciendo situaciones de aprendizaje entretenida y significativa.

2. El uso del material didáctico algeplano en la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas, permite tener una visión integral del proceso de aprendizaje de las alumnas y conduce a la adquisición de aprendizajes significativos, respecto de quienes abordaron el tema en forma pasiva, con exposición del profesor y participación casi nula de las alumnas en clase, como se constató durante el trabajo de campo.

3. El uso del material didáctico algeplano posibilita un trabajo consciente, responsable, con libertad y autonomía de la alumna, tanto individual como grupal. Donde el maestro tiene la misión de motivar y orientar el aprendizaje. Asímismo, la relación profesor-alumna, alumna-alumna sufren cambios significativos, que se manifiestan en el conductismo y los hábitos de estudio desarrollados en las alumnas del grupo experimental.

4. El desarrollo del tema de ecuaciones cuadráticas con algeplanos en clase, estimula el aprendizaje eficaz, eficiente y efectivo en el desarrollo de sus capacidades, habilidades y actitudes, la cual nos permite obtener un aprendizaje significativo en las alumnas. El mismo que ha sido comprobado con el análisis estadístico de la prueba de salida "por diferencia de medias", del grupo experimental y de control, que arroja una diferencia estadísticamente significativa.

5. El estudio de la representación y resolución de ecuaciones cuadráticas, con el apoyo del material didáctico algeplano da la ventaja de: manipular las variables de una expresión algebraica proporcionando la comprensión de nuevos conocimientos, así como para enriquecer su aprendizaje y lograr mejores resultados.

SUGERENCIAS

1. Para una mejor comprensión del álgebra, es conveniente que desde el sexto grado de educación primaria y primer grado de la educación secundaria, los docentes enseñen expresiones simbólicas con materiales manipulativos como son los algeplanos.

2. Sugerimos a los docentes del área de matemática del nivel secundario y otros niveles que utilicen, materiales manipulativos en la enseñanza-aprendizaje de las expresiones algebraicas para mejorar en el aprendizaje significativo de los estudiantes.

3. Propiciar el desarrollo de módulos didácticos, como los elaborados para esta investigación, en temas diversos para reforzar el aprendizaje de los diversos tópicos de la matemática, en el nivel secundario y otros niveles educativos.

4. Replicar la presente investigación en otras poblaciones y muestras, así como en otras asignaturas, posibilitando comparaciones cualitativas y cuantitativas, para ratificar o reforzar nuestras conclusiones fundamentales.

5. Y por ultimo, sugerimos a las autoridades e Instituciones Educativas dar apoyos y estímulos a los docentes que propicien innovaciones en la enseñanza; tales como elaboración y uso de materiales educativos, con miras a lograr resultados eficaces en su labor docente y optimizar en el aprendizaje de los alumnos.

BIBLIOGRAFIA

ALARCÓN BORTOLUSSI, Jesús, BONILLA RIUS, Elisa (2004) El *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación secundaria* México. 2ra Ed.: *Pág.11*.

ALSINA, C., BURGUÉS, C. Y FURTUNY. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis. Pág. 13.

ÁLVAREZ, A. (1996). *Actividades matemáticas con materiales didácticos*. Madrid: MEC-Narcea. Pág. 9.

AUSUBEL, David, NOVAK, Joseph & HANESIAN, Helen (1998) Psicología Educativa. México: Trillas. Pág. 27.

CÓRDOVA, Manuel (1999). *Estadística Inferencial*. Lima: Moshera S.A.

COVEÑAS NAQUICHE, Manuel (2007). *Matemática de tercer grado*. Lima-Perú. Bruño. Pág. 298.

DE GUZMAN, M. & GIL, D. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones*. Madrid: Editorial popular, S.A.

DÍAZ BARRIGA, F y HERNANDEZ ROJAS, G (2002). *Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo: una interpretación constructivista*. México: Mc Graw Hill.

DIENES, Z. (1970). Conceptos algebraicos. Cap. 4 *La construcción de las matemáticas*. Ed. Vicens-Vives. Barcelona. Págs. 60 y 90.

FERNÁNDEZ, Santiago. (2001). *La historia de las matemáticas en el aula en UNO. Revista de Didáctica de las matemáticas*. Barcelona. 2001. GRAO. pp. 9-10.

FELDMAN, R.S. (2005). *Psicología: con aplicaciones en países de habla hispana.* (Sexta Edición) México, MC-Grill Hill

FERRANDEZ, A. (1979). *La Educación Constantes y Problemas Actual*. Barcelona: SEAC. p. 29

GIMÉNEZ, Joaquín (1997). *Evaluación en matemáticas una integración de perspectivas.* Madrid: Síntesis S.A.

GOMEZ, Pedro (1996). *La Problemática de las Matemáticas Escolares.* Bogotá: Iberoamericana.

GONZÁLEZ, D. (2008). *Didáctica o dirección del aprendizaje.* Bogotá. Cooperativa Editorial Magisterio

HERNANDEZ ROJAS (2000). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo.* Pág. 115.

HERNANDEZ, R., FERNANDEZ, C. & BAPTISTA, P. (2006). *Metodología de investigación.* México: Interamericana. S.A.

LARRUBIA, J.J. (2004). *Resolución de ecuaciones de segundo grado con puzle algebraico (guía del docente)* , Archidona, Málaga- España.

LEITZE, A. R. y KITT, N. A. (2000). *Using homemade Algebra Tiles to develop Algebra and Prealgebra conceps. Mathematics Teacher*, Vol. 93 issue 6, september 2000, Pag. 462,463.

LLINARES, Salvador (1990). *Teoría y Práctica en educación matemática.* Sevilla: Ediciones ALFAR.

MARQUËS, (2000). *Recursos Educativos*: http://dewey.uab.es/pmarques/medio.htm. Revisado 20 de diciembre del 2009.

MASON, R.; LIND, D. & MARCHAL, W. (2001). *Estadística para Administración y Economía.* México, D.F.: Alfa Omega.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN (1999). *Manual para docentes de educación secundaria.* MED, PLANCAD, http://ciberdocencia.gob.pe/index.php?cat=266, revisado 31 de noviembre del 2009.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DEL PERÚ (2007). *Materiales educativos y el aprendizaje de la matemática.* Ediciones El Nocedal S.A.C. Perú. 1ra Ed. Pág. 67.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2007), *Guía de evaluación del aprendizaje*, segunda ED. Corporación Grafica Navarrete S.A.C. Lima – Perú.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2007), *Resolución de ecuaciones*, Primera ED. El Nocedal S.A.C. Lima-Perú.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DEL PERÚ. (2006). *Guía, Uso y conservación de Algeplanos* Pág. 5,6.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, (2008). *Diseño Curricular Nacional en la Educación Básica Regular*, publicado en www.minedu.gob.pe. Revisado 12 de enero del 2010.

MONEREO, Carles *et al*, (1998). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en el aula*, España, SEP/Fondo Mixto/Graó.

MOREIRA, Marco Antonio (2003). *Aprendizaje Significativo: teorías y prácticas*, Edición: A.MACHADO LIBROS, S.A., 2da.Ed., España – Madrid.

MOYA, Rufino & SARAVIA, Gregorio (2004). *Probabilidad e inferencia estadística. Lima – Perú.* Ed. San Marcos.

OGALDE, Isabel (2003*). Los materiales didácticos, medios y recursos de apoyo a la docencia*. México D.F.: Trillas, Pág.21.

ORLICH, Donald (1994). *Técnicas de enseñanza o modernización en el aprendizaje*. México: Noriega editores.

PROGRAMA DE MEJORAMIENTO DE LA CALIDAD DE LAS ESCUELAS BÁSICAS DE SECTORES POBRES (PMCEBSP - 2002). *Guía de Utilización del Material Didáctico. Pág. - 900*. Chile. 1ra Ed.: Jansa.

PUIG, Luis, (1997). Análisis fenomenológico, en *La Educación matemática en la enseñanza secundaria*. ICE. Universidad de Barcelona. Rico y otros (Coord.). Editorial Norsori. p.87.

RAGNI,V. Marcela . *El enfoque constructivista de los procesos de enseñanza y aprendizaje*, http://www.monografias.com/trabajos69/enfoque-constructivista-procesos-ensenanza aprendizaje/enfoque-constructivista-procesos-ensenanza-aprendizaje2.shtml. Revisado el 10 de diciembre 2009.

RESNICK, L. y FORD, W. (1990). *La enseñanza de la matemática y sus fundamentos psicológicos*. Paidós.

ROSEN, F. (1831). *Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi : Algebra*. London.

S. Gandz (ed.), The geometry of al-Khwarizmi (Berlin, 1932). Tomado del artículo *Biografía de Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi,* de J. J. O' Connor y E. F. Robertson. Traductor: José Manuel García Estevez. MacTutor History of Mathematics Archive. p. 4.

SOCAS, Robaina y otros. (1989). *Iniciación al álgebra*. Madrid. Editorial Síntesis.

TORI LOZA, Armando (2000). *Problemas de álgebra y como resolverlos*. Lima-Perú: Racso. Pág. 415.

TORRES MATTOS,Carlos (2000). *Algebra teoría y práctica*. Lima-Perú: San Marcos. Pág. 731.

VALDERRAMA M, Santiago (2004). P*asos para elaborar proyectos y tesis de investigación científica*. Lima - Perú. Ed. San Marcos.

VERA GUTIÉRREZ, Carlos. E (2007). *Matemática de tercer grado*. Lima-Perú: Bruño.

VILCHEZ GUIZADO, Jesús (2007). *Modelo de enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas en quinto grado de educación secundaria*. Tesis para optar el grado académico de doctor en educación. PUCP. Lima – Perú.

ANEXO

Anexo 01: Matriz de consistencia

Material didáctico algeplano en el aprendizaje significativo de las ecuaciones cuadráticas en tercer grado de secundaria de la I. E. Aurora Inés Tejada, del distrito de Abancay-2010						
Problema general	**Objetivo general**	**Hipótesis general**	**Variables e indicadores**	**Metodología**	**Técnicas e instrumentos**	**Población muestra**
¿Con el uso del material didáctico algeplano en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas; es posible lograr un aprendizaje significativo de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay – 2010? **Problemas específicos** **2.** ¿De qué manera la representación de las ecuaciones cuadráticas con el material didáctico algeplano es efectivo y contribuye en el aprendizaje significativo de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay - 2010? **3.** ¿En qué forma el material didáctico algeplano apoya en la resolución de las ecuaciones cuadráticas para optimizar el aprendizaje significativo de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada, del distrito de Abancay - 2010? **4.** ¿Qué actitudes demuestran las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay, para el logro del aprendizaje significativo de las ecuaciones cuadráticas con el uso del material didáctico algeplano?	Demostrar que con el uso adecuado del material didáctico algeplano, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas, se logra un aprendizaje significativo de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay – 2010. **Objetivos específicos** **1.** Comprobar la efectividad del material didáctico algeplano en la representación de las ecuaciones cuadráticas y lograr un aprendizaje significativo de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay - 2010. **2.** Verificar en que forma el material didáctico algeplano apoya en la resolución de las ecuaciones cuadráticas, para optimizar el aprendizaje significativo de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada, del distrito de Abancay - 2010. **3.** Conocer la actitud de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay, para el logro del aprendizaje significativo de las ecuaciones cuadráticas con el uso del material didáctico algeplano, durante las sesiones de aprendizaje	Con el uso del material didáctico algeplano, en el proceso de enseñanza- aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas, se logra un aprendizaje significativo en las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay – 2010. **Hipótesis específicos** **1.** La representación de las ecuaciones cuadráticas con el uso del material didáctico algeplano es efectivo y contribuye en el aprendizaje significativo de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay - 2010. **2.** La resolución de ecuaciones cuadráticas con el apoyo del material didáctico algeplano mejora el aprendizaje significativo de las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada, Abancay - 2010. **3.** Las alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay demuestran actitudes positivas para el logro del aprendizaje significativo de las ecuaciones cuadráticas con el uso del material didáctico algeplano.	**<u>VI = variable independiente</u>** Material didáctico algeplano **<u>Indicadores de la variable independiente:</u>** X_1. Representación de las ecuaciones cuadráticas con el material didáctico algeplano. X_2. Resolución de ecuaciones cuadráticas con el apoyo del material didáctico algeplano. X_3. Actitud de las alumnas, hacia el aprendizaje de ecuaciones cuadráticas. **<u>VD = Variable dependiente</u>** Aprendizaje significativo de ecuaciones cuadráticas.	**<u>Diseño de investigación:</u>** Cuasi-Experimental con: pre-test y post-test **<u>Tipo de investigación:</u>** Aplicada. **<u>Nivel de investigación:</u>** Explicativa	**<u>Técnicas:</u>** • Pruebas o exámenes tipo test. • Observación directa. • Ejercicios prácticos **<u>Instrumentos</u>** • Pre -test. • Post- test. • Lista de cotejo. • Cuadernillo de actividades y ejercicios. • Cuestionario tipo lickert	**<u>Población</u>** Conformado por 164 alumnas de tercer grado de secundaria de la I.E. Aurora Inés Tejada del distrito de Abancay. **<u>Muestra</u>** La muestra esta determinado por 80 alumnas: 42 alumnas para el grupo experimental y 38 alumnas para el grupo control.

Anexo 02

Extracto de acta de evaluación de 2do grado de secundaria en el área de matemática, 2009

Sección "C"			Sección "D"		
Nº de orden	**APELLIDOS Y NOMBRES**	**Matemática**	**Nº de orden**	**APELLIDOS Y NOMBRES**	**Matemática**
1	ARONE LEON, Úrsula julia	11	1	ABARCA FARFAN, Karen Antonnela	11
2	AYMA INCA, Flor María	12	2	CARRION PIEROLA, María Leticia	11
3	AZURIN ZAMBRANO, Alexandra	13	3	CCASA CHOQUE, Rocío	10
4	BARAZORDA TAPIA, Jakelín Milagros	14	4	CCOÑISLLA ASCONA, Maryelee Kathlee	11
5	BECERRA RIOS, Leslie Julieth	10	5	CCOYLLOR MENDEVIL, Guadalupe	10
6	CABALLERO CCARHUASLLA, Analí. F	12	6	CERVANTE CHIPA, Irma	12
7	CARRASCO GONZALES, Rocío Stefanie	11	7	CHAVEZ FLORES, Kelita Abigail	10
8	CASO ARANDO, Luz Arancelli	11	8	CHECCA CCORIMANYA, Laura Araceli	11
9	CORDOVA DURAND, Madeleine	11	9	CHIPA RIVAS, Sheyla Zunilda	19
10	CRUZ CAYLLAHUA, Shermely Nicol	10	10	CHUMBES CCAHUANA, Xiomara Luz	12
11	CHUQUITAYPE JALIXTO, Danny Luz	14	11	DE LA CRUZ DURAND, María Carolina	12
12	DELGADO ENRIQUEZ, Mirella Rosa	13	12	FLORES FLORES, Nadia Saturnina	12
13	DELGADO HUAMANI, Mishel	13	13	GUEVARA NIÑO DE GUZMAN, Mileydy	11
14	DELGADO ORIHUELA, Hilda Marisol N.	12	14	HOYOS BERRIO, Edith Yadira	11
15	DURAND QUISPE, Adalí Amariliz	11	15	HUAMAN AGUIRRE, Rosmery	11
16	ESCALANTE BAÑADARES, Amanda	08	16	HUAMAN HUAYANA, Yesenia Yesica	12
17	ESCOBAR PEDRAZA, Abigail	13	17	HUAMAN PEÑA, Titiana Fiorela	10
18	FLORES AYMARA, Carmen Rosa	11	18	HUAMANI HUAMANI, Tania	13
19	GUIZADO QUISPE, Wendy Yobalena	12	19	HUAMANÑAHUI ARROYO, Joelda Mytzy	11
20	HUMANÑAHUI CHILCLLA, Naysha	11	20	HUARACA CHIPAYO, Yennyfeher Jessica	11
21	HUILLCAÑAHUI CERVANTES, Vanesa	12	21	HURTADO BOCANGEL, Arlet Yanira	10
22	JARA PEREZ, Lady Celia	11	22	IPENZA OCAMPO, Treise	10
23	JIMENEZ ORTEGA, Daisy	16	23	LOAYZA ALATA, Yomira Judith	17
24	LLAHUILLA QUISPE, Sinthia Lizeth	12	24	LLANTERHUAY GAMARRA, Rocío Nair	10
25	MALLQUI TURPO, Carolina	13	25	MAMANI VILLENA, Ruth Mery	11
26	MARQUEZ GUIZADO, Flor de María	11	26	MARTINEZ AVENDAÑO, Cintia	12
27	PARCCO ZEA, Guísela	11	27	MAZA SOLIS, Jhomira	12
28	QUISPE CAHUANA, Celia Melissa	14	28	MEDRANO VARGAS, Sharmely Lizbeth	12
29	QUISPE GONZALES, Mahumi Margot	11	29	MEDINA GUIZADO, Lizbeth	10
30	ROBLES ARAUJO, Soledad	13	30	MENDOZA FERREL, Sheyla María	10
31	ROMAN VARGAS, Karen	10	31	MONZON CCOLCCA, Cinthia	13
32	SAAVEDRA DURAND, Sheila Fiorela	11	32	ORTIZ HUAMAN, Vanessa	12
33	SANTE ALVITES, Liz	11	33	PEREZ DAMIAN, Anchela	15
34	SEGUNDO GONZALES, Jenifer Eilin	11	34	QUISCA MERINO, Vanessa	10
35	SERRANO LAPA, Katherin	10	35	RAYME PALOMINO, Olinda	14
36	TAIPE CARRASCO, Kaisarda	09	36	ROSSEL QUISPE, Karol Almendra	11
37	TOROMANYA DUEÑAS, Zenhia	10	37	ROBLES VEGA, Shanelly Luzeshelin	13
38	UMASI HUARACHA, Katerin Silvia	12	38	SALDIVAR RIVERA, Shaly Narvy	11
39	VALDERRAMA MALLQUI, Mirian	10	39	SALDIVAR VALVERDE, Mariloga S.	11
40	VILCAS GARCIA, Sharmely	11	40	SIANCAS BLAS, Katerin Valentina	11
41	YUPANQUI TORRES, Mavet Jera	11	41	TAIPE MOREANO, Zayuri	12
42	ZAMALLOA MACHACCA, Lourdes	12	42	VALVERDE AVALOS, Marivet	11
	Promedio: 11,55			**Promedio: 11,64**	

Anexo 03

Lista de las alumnas de la sección c (grupo experimental) y la sección d (grupo control) de tercer grado y código asignado

GRUPO EXPERIMENTAL			GRUPO CONTROL		
Nº	APELLIDOS Y NOMBRES		Nº	APELLIDOS Y NOMBRES	
1	ARONE LEON, Úrsula julia	A1	1	ABARCA FARFAN, Karen Antonnela	A1
2	AYMA INCA, Flor María	A2	2	AGUILAR AYMARA, Zulma	A2
3	AZURIN ZAMBRANO, Alexandra	A3	3	BECERRA VALDERRAMA, Roxana	A3
4	BARAZORDA TAPIA, Jakelín Milagros	A4	4	CCASA CHOQUE, Rocio	A4
5	BECERRA RIOS, Leslie Julieth	A5	5	CERVANTES CHIPA, Irma	A5
6	BENAVENTE PEÑA, Romy Saly	A6	6	CCOÑISLLA ASCONA, Maryelee Kathlee	A6
7	CABALLERO CCARHUASLLA, Analí. F	A7	7	CHECCA CCORIMANYA, Laura Araceli	A7
8	CARRASCO GONZALES, Rocío Stefanie	A8	8	CHUMBES CCAHUANA, Xiomara Luz	A8
9	CASO ARANDO, Luz Arancelli	A9	9	DE LA CRUZ DURAND, María Carolina	A9
10	CORDOVA DURAND, Madeleine	A10	10	FLORES FLORES, Nadia Saturnina	A10
11	CHIPANA FLORES, Eveling	A11	11	GUEVARA NIÑO DE GUZMAN, Mileydy	A11
12	CHUQUITAYPE JALIXTO, Danny Luz	A12	12	HOYOS BERRIO, Edith Yadira	A12
13	DELGADO ENRIQUEZ, Mirella Rosa	A13	13	HUAMAN AGUIRRE, Rosmery	A13
14	DELGADO HUAMANI, Mishel	A14	14	HUAMAN HUAYANA, Yesenia Yesica	A14
15	DURAND QUISPE, Adalí Amariliz	A15	15	HUAMANI HUAMANI, Tania	A15
16	ESCOBAR PEDRAZA, Abigail	A16	16	HUAMANÑAHUI ARROYO, Joelda Mytzy	A16
17	FLORES AYMARA, Carmen Rosa	A17	17	HUARACA CHIPAYO, Yennyfeher Jessica	A17
18	GUIZADO QUISPE, Wendy Yobalena	A18	18	HURTADO BOCANGEL, Arlet Yanira	A18
19	HUMANÑAHUI CHILCLLA, Naysha	A19	19	IPENZA OCAMPO, Treise	A19
20	HUILLCAÑAHUI CERVANTES, Vanesa	A20	20	LOAYZA ALATA, Yomira Judith	A20
21	JARA PEREZ, Lady Celia	A21	21	MAMANI VILLENA, Ruth Mery	A21
22	JIMENEZ ORTEGA, Daisy	A22	22	MARTINEZ AVENDAÑO, Cintia	A22
23	LLAHUILLA QUISPE, Sinthia Lizeth	A23	23	MAZA SOLIS, Jhomira	A23
24	MALLQUI TURPO, Carolina	A24	24	MEGIA GONZALES, Estefani	A24
25	MARQUEZ GUIZADO, Flor de María	A25	25	MENDEZ ALTAMIRANO, Thalia	A25
26	MEZA ANCALLA, Shandy Pamela	A26	26	MONZON CCOLCCA, Cinthia	A26
27	PARCCO ZEA, Guísela	A27	27	PEREZ DAMIAN, Anchela	A27
28	QUISPE CAHUANA, Celia Melissa	A28	28	QUISCA MERINO, Vanessa	A28
29	QUISPE GONZALES, Mahumi Margot	A29	29	RAYME PALOMINO, Olinda	A29
30	ROBLES ARAUJO, Soledad	A30	30	ROSSEL QUISPE, Karol Almendra	A30
31	ROMAN VARGAS, Karen	A31	31	SALDIVAR RIVERA, Shaly Narvy	A31
32	SAAVEDRA DURAND, Sheila Fiorela	A32	32	SALDIVAR VALVERDE, Mariloga Stephany	A32
33	SANTE ALVITES, Liz	A33	33	SIANCAS BLAS, Katerin Valentina	A33
34	SAUÑE TAPIA, Yulissa	A34	34	SIERRA TRUJILLO, Stephany	A34
35	SEGUNDO GONZALES, Jenifer Eilin	A35	35	TAIPE MOREANO, Zayuri	A35
36	SERRANO LAPA, Katherin	A36	36	VALVERDE AVALOS, Marivet	A36
37	TAIPE CARRASCO, Kaisarda	A37	37	VALENZUELA PINAREZ, Karitza	A37
38	TOROMANYA DUEÑAS, Zenhia	A38	38	CCORAHUA MEZA, Nelly	A38
39	UMASI HUARACHA, Katerin Silvia	A39			
40	VILCAS GARCIA, Sharmely	A40			
41	YUPANQUI TORRES, Mavet Jera	A41			
42	ZAMALLOA MACHACCA, Lourdes	A42			

Anexo 04

INSTITUCIÓN EDUCATIVA "AURORA INÉS TEJADA"

NOTA

PRUEBA DE ENTRADA	**UNIDAD ECUACIONES CUADRÁTICAS**
Nombres y Apellidos:..	
Grado:.......Sección: ....Fecha:............	**Grupo: ....**

1. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $4x-2x+5=x-6$	**b)** $7x-3x-15=3x-10$

2 Puntos

2. Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $(x+3)+2(x-3)-4=2(x-3)$	**b)** $2(x-3)+5(x+2)=4(x-1)+3$

3 Puntos

3. Calcular el valor numérico del polinomio.

a) x^2+3x+2, para $x=-4$	**b)** $2x^2-6x+9$, para $x=3$

3 Puntos

4. Multiplicar las siguientes expresiones polinómicas.	
a) $(x+2)(x-5)=$	**b)** $(5x-3)(x+2)=$ **3 Puntos**
5. Desarrolla y simplifica el resultado:	
a) $(x-4)^2=$	**b)** $(4x+2)^2=$ **3 Puntos**
6. Desarrolla y simplifica el resultado:	
a) $(x+5)^2-9=$	**b)** $(4x-2)^2-10=$ **3 Puntos**
7. Completa la siguiente expresión del mismo modo que se hace en el ejemplo.	
Ejemplo: $x^2-8x+16=(x-4)^2$	
a) $x^2-4x+\_=(\_-\_)^2$	**b)** $4x^2+\_+9=(\_+\_)^2$ **3 Puntos**

Anexo 05

Resultados de la prueba de entrada del grupo experimental y control

[redacted]

Nº	Alumna	NOTA	Nº	Alumna	NOTA
1	A1	7	1	A1	6
2	A2	6	2	A2	8
3	A3	10	3	A3	9
4	A4	9	4	A4	10
5	A5	5	5	A5	12
6	A6	4	6	A6	6
7	A7	8	7	A7	11
8	A8	7	8	A8	6
9	A9	9	9	A9	7
10	A10	6	10	A10	10
11	A11	12	11	A11	11
12	A12	11	12	A12	8
13	A13	10	13	A13	9
14	A14	8	14	A14	6
15	A15	6	15	A15	8
16	A16	9	16	A16	14
17	A17	9	17	A17	10
18	A18	14	18	A18	8
19	A19	4	19	A19	7
20	A20	12	20	A20	16
21	A21	9	21	A21	8
22	A22	13	22	A22	7
23	A23	7	23	A23	4
24	A24	11	24	A24	8
25	A25	6	25	A25	13
26	A26	16	26	A26	8
27	A27	9	27	A27	6
28	A28	12	28	A28	5
29	A29	9	29	A29	15
30	A30	5	30	A30	5
31	A31	8	31	A31	12
32	A32	6	32	A32	8
33	A33	5	33	A33	5
34	A34	7	34	A34	9
35	A35	8	35	A35	10
36	A36	8	36	A36	6
37	A37	6	37	A37	4
38	A38	7	38	A38	5
39	A39	15			
40	A40	8			
41	A41	10			
42	A42	12			
Promedio		**8,6**	**Promedio**		**8,4**
Nota mayor		**16**	**Nota mayor**		**16**
Nota menor		**04**	**Nota menor**		**04**
Desviación estandar		**2,90**	**Desviación estándar**		**2,99**
Varianza		**8,43**	**Varianza**		**8,95**
Coeficiente de variación		**33,4%**	**Coeficiente de variación**		**35,5%**

Anexo 06

Lista de cotejo de la evaluación de ecuaciones cuadráticas (Grupo Experimental)

Área: Matemática	EVALUACIÓN DE APRENDIZAJE DE LA UNIDAD DE ECUACIONES CUADRÁTICAS																					
I.E: Aurora Inés Tejada	Representación de ecuación cuadrática con el uso del material didáctico algeplano						Resolución de ecuaciones cuadráticas con el apoyo del material didáctico algeplano											Actitudes ante el área					
Grado: 3ro sección: C INDICADORES / ALUMNA	Representa y Agrupa expresiones algebraicas.	Representa una E.C. e identifica los términos y coeficientes.	Representa una E.C. en forma general completa.	Representa una E.C. en forma general incompleta.	Representa una E.C. en forma de producto de dos factores.	PROMEDIO I	Comprueba si las soluciones de una E.C son correctas o incorrectas.	Resuelve E.C. incompletas.	Determina la suma de las raíces de una E.C.	Determina el producto de las raíces de una E.C.	Forma una E.C. dada sus raíces.	Resuelve E.C. en forma factorizada.	Resuelve E.C. en forma de binomio al cuadrado.	Resuelve E.C. completando cuadrados.	Resuelve E.C. con la formula general (Bháskara).	Resuelve problemas aplicados a la vida cotidiana.	PROMEDIO II	Muestra empeño al realizar y presentar sus tareas.	Toma la iniciativa en las actividades desarrolladas	Consulta frecuentemente.	Muestra interés y motivación hacia el aprendizaje de las E.C.	Es perseverante en el desarrollo de los ejercicios.	PROMEDIO III
A1	3	3	3	4	2	15	2	2	1	2	1	2	1	1	1	1	14	3	2	3	4	4	16
A2	3	2	3	3	2	13	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1	12	3	3	2	3	3	14
A3	3	3	3	3	3	15	2	1	1	2	1	2	1	1	1	2	14	3	3	3	4	4	17
A4	3	2	2	3	3	13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	11	3	3	3	3	2	14
A5	4	3	3	2	2	14	1	1	1	1	1	2	2	2	1	1	13	3	3	3	4	3	16
A6	2	2	2	2	3	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	2	3	2	3	2	12
A7	3	4	2	3	2	14	1	2	1	2	2	1	1	1	1	1	13	4	3	3	3	3	16
A8	3	4	3	3	2	15	2	1	1	2	1	2	1	1	1	2	14	3	3	3	2	3	14
A9	3	2	3	3	3	14	2	1	1	1	1	2	1	1	2	2	14	4	3	3	4	3	17
A10	2	3	3	3	3	14	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	13	2	3	3	2	3	13
A11	3	4	3	3	4	17	2	2	1	2	2	1	2	1	1	2	16	4	3	3	3	4	17
A12	3	3	3	4	3	16	2	1	2	1	1	1	1	2	2	2	15	3	3	2	3	3	14
A13	3	3	3	3	4	16	2	1	2	1	2	2	2	2	1	2	17	4	2	3	4	3	16
A14	3	2	4	3	3	15	1	2	2	1	2	1	1	1	2	1	14	3	3	4	3	2	15
A15	2	2	2	2	3	11	1	2	1	2	1	1	1	1	1	1	12	3	2	2	3	3	13
A16	4	3	3	2	3	15	2	1	2	1	2	1	1	1	1	2	14	3	3	4	3	4	17

A17	3	2	3	3	3	14	1	1	2	1	1	2	2	2	1	1	14	3	4	4	3	2	16
A18	3	3	3	4	4	17	1	2	2	2	1	2	1	2	1	1	15	4	3	3	3	4	17
A19	2	2	2	3	2	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	2	2	2	3	2	11
A20	3	2	3	4	3	15	2	2	2	2	1	1	2	1	1	2	16	3	2	3	3	3	14
A21	4	3	3	2	3	15	1	1	2	2	1	2	1	2	1	1	14	3	3	2	3	3	14
A22	3	4	4	3	3	17	2	1	1	1	2	1	1	2	2	2	15	4	2	4	3	3	16
A23	2	3	3	2	3	13	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	14	3	3	3	4	3	16
A24	3	3	3	3	4	16	2	1	2	2	1	2	1	1	2	2	16	3	3	4	3	3	16
A25	3	3	3	2	3	14	1	2	1	1	1	2	1	1	2	1	13	3	2	3	3	3	14
A26	4	4	3	3	4	18	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	18	4	3	4	3	4	18
A27	2	3	4	3	3	15	1	2	1	1	2	1	2	2	2	1	15	3	3	4	3	3	16
A28	3	3	3	3	3	15	1	2	1	1	2	1	2	2	1	1	14	3	3	3	4	3	16
A29	3	3	3	3	2	14	2	1	1	2	1	1	1	2	1	1	13	3	3	2	3	3	14
A30	3	3	3	2	2	13	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	12	3	2	3	3	3	14
A31	3	4	3	3	2	15	2	1	1	2	2	1	2	2	2	1	16	3	3	2	4	4	16
A32	3	3	2	4	2	14	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	15	3	3	4	4	3	17
A33	2	3	2	3	2	12	1	1	1	1	2	1	2	1	2	1	13	4	3	2	3	3	15
A34	3	3	4	2	4	16	2	1	1	2	1	2	1	2	1	1	14	4	3	4	3	3	17
A35	3	3	2	3	3	14	1	1	2	1	1	2	2	1	2	2	15	3	3	3	4	3	16
A36	4	2	3	2	3	14	2	1	1	1	1	1	2	1	2	1	13	3	3	3	3	3	15
A37	3	3	2	3	2	13	1	2	2	1	2	1	1	1	2	1	14	3	3	3	3	3	15
A38	3	4	2	2	2	13	1	1	2	1	2	1	1	1	1	2	13	3	3	2	3	3	14
A39	3	4	3	3	4	17	2	1	2	2	2	1	2	2	1	2	17	4	4	3	3	3	17
A40	3	3	3	2	3	14	1	2	1	2	1	1	2	2	1	1	14	3	3	3	4	3	16
A41	3	4	3	3	2	15	1	2	1	1	2	1	1	1	1	2	13	3	3	3	3	3	15
A42	3	3	3	3	2	14	1	1	2	2	1	1	1	1	1	2	13	3	3	3	3	3	15
Total de puntaje alcanzado	124	125	120	119	118		59	57	59	61	58	59	57	59	56	60		133	120	125	135	128	
Nota alcanzado por indicador	**14.8**	**14.9**	**14.3**	**14.2**	**14.0**	14.4	**14.1**	**13.6**	**14.1**	**14.5**	**13.8**	**14.1**	**13.6**	**14.1**	**13.5**	**14.3**	14.0	**15.8**	**14.3**	**14.9**	**16.1**	**15.2**	15.3

Resumen sobre representación de ecuación cuadrática con el uso del material didáctico algeplano		**Resumen sobre resolución de ecuaciones cuadráticas con el apoyo del material didáctico algeplano**		**Resumen sobre actitudes ante el área**	
Promedio-I	14,4	Promedio-II	14,0	Promedio-I-AAA	15,3
Desviación estándar	1,62	Desviación estándar	1,70	Desviación estándar	1,52
Varianza	2,64	Varianza	2,89	Varianza	2,29
Coeficiente de variación	11,26%	Coeficiente de variación	12,22%	Coeficiente de variación	9,9%

Anexo 07:

Lista de cotejo de la evaluación de ecuaciones cuadráticas (Grupo Control)

Área: Matemática	EVALUACIÓN DE APRENDIZAJE DE LA UNIDAD DE ECUACIONES CUADRÁTICAS																						
I.E: Aurora Inés Tejada	Representación de ecuación cuadrática						Resolución de ecuaciones cuadráticas											Actitudes ante el área					
Grado: 3ro sección: D / INDICADORES / ALUMNA	Representa y Agrupa expresiones algebraicas.	Representa una E.C. e identifica los términos y coeficientes.	Representa una E.C. en forma general completa.	Representa una E.C. en forma general incompleta.	Representa una E.C. en forma de producto de dos factores.	PROMEDIO I	Comprueba si las soluciones de una E.C son correctas o incorrectas.	Resuelve E.C. incompletas.	Determina la suma de las raíces de una E.C.	Determina el producto de las raíces de una E.C.	Forma una E.C. dada sus raíces.	Resuelve E.C. en forma factorizada.	Resuelve E.C. en forma de binomio al cuadrado.	Resuelve E.C. completando cuadrados.	Resuelve E.C. con la formula general (Bháskara).	Resuelve problemas aplicados a la vida cotidiana.	PROMEDIO II	Muestra empeño al realizar y presentar sus tareas.	Toma la iniciativa en las actividades desarrolladas	Consulta frecuentemente.	Muestra interés y motivación hacia el aprendizaje de las E.C.	Es perseverante en el desarrollo de los ejercicios.	PROMEDIO III
A1	3	1	2	2	2	10	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	9	2	2	3	2	3	12
A2	2	3	2	2	2	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	2	3	3	2	2	12
A3	3	2	2	2	2	11	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	11	2	1	3	2	3	11
A4	2	3	3	2	2	12	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	12	3	3	2	3	2	13
A5	3	3	3	3	2	14	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	15	3	3	2	2	3	13
A6	2	3	2	2	1	10	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	9	1	3	2	2	2	10
A7	3	3	3	2	2	13	1	1	2	2	1	2	1	1	2	1	14	3	3	2	3	2	13
A8	2	2	2	2	2	10	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	9	2	2	1	3	2	10
A9	2	2	3	2	2	11	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	11	2	2	2	3	2	11
A10	3	3	3	3	2	14	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	13	3	2	3	2	3	13
A11	3	4	3	3	2	15	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	12	2	3	1	3	2	11
A12	2	3	3	3	2	13	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	11	2	2	2	2	3	11
A13	3	2	3	3	2	13	2	1	1	1	1	1	1	1	2	1	12	3	3	2	2	2	12
A14	2	1	2	2	3	10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	2	1	2	3	2	10
A15	2	3	2	3	2	12	1	1	1	1	1	2	1	2	1	1	12	3	2	3	2	3	13
A16	3	4	2	3	3	15	2	1	1	1	2	1	2	2	1	1	14	2	3	2	3	2	12
A17	2	3	2	3	2	12	1	1	1	1	2	2	1	2	1	1	13	3	2	2	2	2	11
A18	2	3	2	2	2	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	2	3	2	2	2	11

A19	3	2	2	2	2	11	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	11	3	3	2	2	2	12
A20	4	4	4	3	3	18	2	2	1	1	2	1	2	2	2	1	16	4	3	3	3	3	16
A21	2	3	2	2	2	11	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	11	3	2	2	2	2	11
A22	3	3	2	2	2	12	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	11	2	3	3	2	2	12
A23	1	1	2	2	2	8	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	8	1	1	2	2	3	9
A24	3	2	2	2	2	11	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	11	1	2	2	3	3	11
A25	3	3	3	3	3	15	2	2	1	1	2	1	1	1	1	2	14	3	2	3	2	3	13
A26	3	2	2	2	3	12	1	1	1	2	2	1	2	1	1	1	13	2	2	2	3	3	12
A27	2	3	2	2	2	11	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1	12	3	2	3	3	2	13
A28	2	2	3	2	2	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	2	2	2	2	3	11
A29	4	3	3	3	4	17	2	1	2	2	1	2	1	1	1	2	15	4	3	3	2	3	15
A30	1	1	1	2	1	6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	3	3	3	2	2	13
A31	2	4	2	3	2	13	1	2	2	1	1	1	1	2	1	1	13	3	2	2	3	2	12
A32	3	2	2	2	2	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	2	2	3	2	2	11
A33	2	1	2	2	2	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	2	2	2	2	2	10
A34	2	2	2	2	3	11	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	11	3	2	2	2	3	12
A35	3	3	2	2	2	12	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	12	3	2	3	3	2	13
A36	2	2	2	2	3	11	1	2	1	1	1	2	1	1	1	1	12	3	2	2	3	2	12
A37	2	1	2	1	2	8	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	7	1	2	2	2	2	9
A38	2	2	2	2	2	10	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	8	1	3	2	2	2	10
Total de puntaje alcanzado	93	94	88	87	83		45	43	44	45	44	45	42	41	43	40		91	88	87	90	90	
Nota alcanzado por indicador	12.2	12.4	11.6	11.4	10.9	11.7	11.8	11.3	11.6	11.8	11.6	11.8	11.1	10.8	11.3	10.5	11.3	12.0	11.6	11.4	11.8	11.8	11.7

Resumen sobre representación de ecuación cuadrática		Resumen sobre resolución de ecuaciones cuadráticas		Resumen sobre actitudes ante el área	
Promedio-I	11,7	Promedio-II	11,3	Promedio-I-AAA	11,7
Desviación estándar	2,36	Desviación estándar	2,05	Desviación estándar	1,47
Varianza	5,56	Varianza	4,19	Varianza	2,16
Coeficiente de variación	20,1%	Coeficiente de variación	17,99%	Coeficiente de variación	12,5%

Anexo 08

INSTITUCIÓN EDUCATIVA "AURORA INÉS TEJADA"

NOTA

PRUEBA DE SALIDA **UNIDAD ECUACIONES CUADRÁTICAS**

Nombres y Apellidos:...

Grado:...... ....Sección: .... Grupo: ....

1. Desarrolla y simplifica el resultado de:

a) $(x+4)^2 =$

b) $(x+5)^2 - 9 =$

2 Puntos

2. Completa la siguiente expresión del mismo modo que se hace en el ejemplo.

Ejemplo: $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$

a) $4x^2 + 12x + \_\_\_ = (\_\_\_ + \_\_\_)^2$

b) $x^2 - \_\_\_ + 4 = (\_\_\_ - \_\_\_)^2$

3 Puntos

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 - 5x = 0$

b) $2x^2 - 8 = 0$

c) $(x+6)(2x+1) = 0$

d) $(x-4)^2 - 4 = 0$

3 Puntos

4. Formar una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones:	
a) $x_1 = -3, x_2 = -2$	**b)** $x_1 = +\frac{1}{2}, x_2 = +2$ **3 Puntos**
5. Resuelve las siguientes ecuaciones:	
a) $-4x^2 + 8x - 4 = 0$	**b)** $3x^2 + 15x + 18 = 0$ **3 Puntos**
6. Resuelve por método de completar cuadrado la ecuación $4x^2 - 12x + 8 = 0$	
	3 Puntos
7. En la ecuación $x^2 - 5x + c = 0$**, una solución es.** $x = 2$**. Calcular el valor de "c" y el de la otra solución.**	
	3 Puntos

Anexo 09

Resultados de la prueba de salida del grupo experimental y control

[illegible]					
N°	Alumna	NOTA	N°	Alumna	NOTA
1	A1	14	1	A1	8
2	A2	12	2	A2	9
3	A3	16	3	A3	10
4	A4	11	4	A4	13
5	A5	13	5	A5	14
6	A6	10	6	A6	9
7	A7	14	7	A7	15
8	A8	14	8	A8	9
9	A9	15	9	A9	11
10	A10	13	10	A10	13
11	A11	18	11	A11	14
12	A12	16	12	A12	11
13	A13	17	13	A13	13
14	A14	14	14	A14	9
15	A15	12	15	A15	11
16	A16	16	16	A16	15
17	A17	13	17	A17	12
18	A18	17	18	A18	10
19	A19	10	19	A19	10
20	A20	15	20	A20	18
21	A21	14	21	A21	12
22	A22	16	22	A22	11
23	A23	14	23	A23	7
24	A24	15	24	A24	10
25	A25	13	25	A25	14
26	A26	19	26	A26	15
27	A27	15	27	A27	11
28	A28	15	28	A28	9
29	A29	14	29	A29	16
30	A30	13	30	A30	11
31	A31	15	31	A31	13
32	A32	16	32	A32	11
33	A33	12	33	A33	9
34	A34	15	34	A34	12
35	A35	14	35	A35	13
36	A36	14	36	A36	11
37	A37	13	37	A37	7
38	A38	12	38	A38	8
39	A39	18			
40	A40	13			
41	A41	14			
42	A42	13			
Promedio		14,2	Promedio		11,4
Nota mayor		19	Nota mayor		18
Nota menor		10	Nota menor		07
Desviación estándar		2,01	Desviación estándar		2,56
Varianza		4,03	Varianza		6,58
Coeficiente de variación		14,1%	Coeficiente de variación		22,5%

Anexo 10

CUESTIONARIO DE TIPO LIKERT, HACIA LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE ECUACIONES CUADRÁTICAS CON EL USO DEL MATERIAL DIDÁCTICO ALGEPLANO)

I.E.…………………………..…………..……..… Grado…………………Sección………………

Núm. Alumna…………………………………… Fecha de nacimiento:……………..…….………..

Lugar de procedencia:…………………………… Núm. de hermanos(as):………………………

Pon una X en los estudios de tus padres:

Padre:	Sin estudios	☐	Primaria	☐	Secundaria	☐	Superior	☐
Madre:	Sin estudios	☐	Primaria	☐	Secundaria	☐	Superior	☐

Pon una X en el nivel socio económico de ingreso familiar mensual:

De: 0-250 ☐ De: 250-500 ☐ De: 500-750 ☐ De 750- más ☐

Pon una X según la respuesta elegida	Totalmente de acuerdo (TA)	De acuerdo (A)	Neutro, ni de acuerdo, ni en desacuerdo (N)	En desacuerdo (D)	Totalmente en desacuerdo (TD)
1. Te gustó trabajar ecuaciones cuadráticas con el uso del material didáctico algeplano.					
2. Los algeplanos te ayudaron a entender mejor las ecuaciones cuadráticas.					
3. Representar y resolver ecuaciones cuadráticas con el material didáctico algeplano, es fácil.					
4. Aprendes más con éste método de trabajo.					
5. Es más interesante las clases de ecuaciones cuadráticas con el uso del algeplano.					
6. Estas en la capacidad de representar geométricamente y resolver ecuaciones cuadráticas, utilizando el material didáctico algeplano.					
7. Las ecuaciones cuadráticas es fácil de entender con el uso del material didáctico algeplano.					
8. Les recomendarías a otras compañeras (os), el uso del material didáctico algeplano.					

Anexo 11

I. PROGRAMACIÓN DIDÁCTICA DE LA UNIDAD DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

TÍTULO: "Conociendo el mundo de las ecuaciones cuadráticas con el material didáctico algeplano"

1. DATOS INFORMATIVOS:

1.1. I.E	:Aurora Inés Tejada
1.2. AREA	: Matemática
1.3. CICLO	: VII
1.4. GRADO	: Tercero
1.5. SECCION	: C y D
1.6. HORAS SEMANALES	: 04 horas
1.7. DURACIÓN	: Del ……………… Al ………………..
1.8. DOCENTES	: Alex Pumacayo V. y Luis A. Alata N.

2. JUSTIFICACIÓN.

Al desarrollar la presente unidad sobre las ecuaciones cuadráticas o ecuaciones de segundo grado, trataremos en lo posible de hacer una matemática mas comprensible utilizando el MATERIAL DIDÁCTICO ALGEPLANO y poniendo en práctica sus potencialidades, capacidades, intelectuales físicas y psicomotoras del estudiante, para luego plasmar el conocimiento a la praxis y resolver diversas situaciones problemáticas en el quehacer de la vida.

3. PRÓPOSITOS.

3.1. CAPACIDADES

CAPACIDADES. FUNDAMENTALES	CAPACIDADES DE ÁREA	CAPACIDADES ESPECÍFICAS
• Pensamiento creativo • Pensamiento crítico • Solución de problemas • Toma de decisiones	• Razonamiento y demostración • Comunicación Matemática • Resolución de problemas	Identifica, relaciona, precisa, representa, analiza, interpreta, calcula, resuelve, aplica, jerarquiza, matematiza, sintetiza, elabora, crea, evalúa, enjuicia, grafica etc.

3.2. VALORES Y ACTITUDES.

VALORES	ACTITUDES
✓ Responsabilidad ✓ Respeto	❖ Presenta sus tareas oportunamente, participa en las sesiones de clase… ❖ Promueve la puntualidad con sus compañeros ❖ Practica las normas de convivencia, conserva limpio su entorno...

4. TEMAS TRANSVERSALES

1. Educación para el éxito

2. Educación en valores.
3. Educación en valores para la formación ética.

5. ORGANIZACIÓN DE LOS APRENDIZAJES

Contenido Diversificado	Aprendizaje Esperado	Capacidad de Área	Actividades y Estrategias	Tiem / Hora
1. Presentación del material didáctico Algeplano	**Identifica** el material didáctico algeplano.	Comunicación matemática.	Exposición y dialogo.	1
2. Descripción del material didáctico Algeplano.	**Analiza y diferencia** el material didáctico algeplano.	Comunicación matemática	Exposición y dialogo.	1
3. Representación geométrica y simplificar los términos de una expresión algebraica con algeplanos.	**Representa** geométricamente con el material didáctico algeplano una expresión algebraica. y agrupa expresiones algebraicas.	Razonamiento y demostración.	Exposición y dialogo.	1
4. Ecuaciones cuadráticas con algeplanos a) Reconocimiento de los términos b) Reconocimiento de los coeficientes.	**Reconoce** los términos y coeficientes en una ecuación cuadrática.	Comunicación matemática.	Trabajo individual y/o grupal, etc.	2
5. Representación de los tipos o formas de una ecuación cuadrática con algeplanos. a) Ecuación en forma general. (incompleta y completa)	**Representa** una ecuación cuadrática en forma general completa e incompleta.	Razonamiento y demostración	Trabajo individual y/o grupal, etc.	2
b) Ecuaciones en forma de producto de dos factores o factorizadas.	**Representa** una ecuación cuadrática en forma de producto de dos factores.		Método deductivo e inductivo.	
c) Ecuaciones en forma de binomio al cuadrado. (Con término independiente y sin término independiente).	**Representa** una ecuación cuadrática en forma de binomio al cuadrado con término independiente y sin término independiente.			
6. Reglas para construir rectángulos y cuadrados con algeplanos.	**Maneja** las reglas de construcción de rectángulos y/o cuadrados.	Comunicación matemática	Exposición y dialogo	2
7. Identificación de las dimensiones de los rectángulos y/o cuadrados representadas con algeplanos.	**Identifica** las dimensiones de los rectángulos y/o cuadrados algebraicamente.	Razonamiento y demostración	Trabajo individual y/o grupal, etc.	2
8. Construcción de rectángulos y cuadrados con algeplanos.	**Construye** rectángulos y/o cuadrados para obtener una	Comunicación matemática	Método	

	ecuación cuadrática más simple.		deductivo e inductivo.	2
9. Solución o raíces de una ecuación cuadrática con algeplanos.	**Comprueba** si las soluciones de una ecuación cuadrática son correctas o incorrectas.	Comunicación matemática	Resolución de problemas en grupo.	2
10. Solución de ecuaciones completas e incompletas.	**Resuelve** ecuaciones cuadráticas completas e incompletas.	Resolución de problemas		2
11. Aplicación de la resolución algebraica en las ecuaciones cuadráticas. a) Suma b) Producto. c) formar una ecuación de segundo grado.	**Determina** la suma y el producto de las raíces de una ecuación cuadrática. **Representa** una ecuación dada sus raíces.	Resolución de problemas	Método deductivo e inductivo.	2
12. Resolución de una ecuación general de segundo grado con una incógnita con algeplanos a) Por medio de factorización.	**Resuelve** ecuaciones cuadráticas en forma factorizada.	Resolución de problemas	Resolución de problemas en grupo e individual.	5
b) Por método de completar cuadrado (sin término independiente).	**Resuelve** ecuaciones cuadráticas en forma de binomio al cuadrado.			
c) Por método de completando cuadrados (con termino independiente).	**Resuelve** ecuaciones cuadráticas completando cuadrados.			
d) Empleando la formula general.	**Resuelve** ecuaciones cuadráticas con la formula general.			
e) Problemas aplicados a la vida cotidiana.	**Resuelve** problemas aplicados a la vida cotidiana.			

6. EVALUACIÓN.

Criterios de Evaluación	Indicadores de Evaluación	Evaluación	
		Técnicas	**Instrumentos**
Razonamiento y Demostración.	☞ **Representa** y agrupa expresiones algebraicas con los algeplanos. ☞ **Reconoce** los términos y coeficientes en una ecuación cuadrática, utilizando el material didáctico algeplano. ☞ **Representa** una ecuación cuadrática en forma general completa e incompleta con los algeplanos. ☞ **Representa** una ecuación cuadrática en forma de	☞Observación sistemática ☞Pruebas	• Prueba de desarrollo. - Pre test.

	producto de dos factores con el algeplano. ☞ **Representa** una ecuación cuadrática en forma de binomio al cuadrado con término independiente y sin término independiente con el algeplano.	escritas. ☞Ejercicios prácticos	- Post test. • Lista de cotejo.
Comunicación matemática.	☞ **Maneja** las reglas de construcción de rectángulos y/o cuadrados con el material didáctico algeplano. ☞ **Identifica** las dimensiones de los rectángulos y/o cuadrados algebraicamente con el apoyo del algeplano. ☞ **Construye** rectángulos y/o cuadrados con el material didáctico algeplano para obtener una ecuación cuadrática más simple. ☞ **Comprueba** si las soluciones de una ecuación cuadrática son correctas o incorrectas en la pizarra. ☞ **Resuelve** ecuaciones cuadráticas incompletas, utilizando el material didáctico algeplano. ☞ **Determina** la suma y el producto de las raíces de una ecuación cuadrática con los algeplanos. ☞ **Representa** una ecuación dada sus raíces con los algeplanos.		• Cuadernillo de actividades y ejercicios. • Guía teórica de algeplanos. • Cuestionario de tipo lickert.
Resolución de Problemas	☞ **Resuelve** ecuaciones cuadráticas en forma factorizada con el apoyó del algeplano. ☞ **Resuelve** ecuaciones cuadráticas en forma de binomio al cuadrado, utilizando los algeplanos. ☞ **Resuelve** ecuaciones cuadráticas completando cuadrados con el apoyo del algeplano. ☞ **Resuelve** ejercicios **de** ecuaciones cuadráticas con la formula general. ☞ **Resuelve** problemas aplicados a la vida cotidiana con el apoyo del material didáctico algeplano.		
Actitud ante el área	☞ **Muestra** empeño al realizar y presentar sus tareas. ☞ **Toma la iniciativa** en las actividades desarrolladas. ☞ **Consulta** frecuentemente. ☞ **Muestra** interés y motivación hacia el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas. ☞ **Participa** activamente en el desarrollo de las sesiones. ☞ **Es perseverante** en el desarrollo de los ejercicios.		

7. RECURSOS, MEDIOS Y MATERIALES

☞ Cuadernos, textos, otros
☞ Material didáctico algeplano
☞ Cuadernillo de actividades y ejercicios
☞ Auditivos: palabra hablada (exposición, dialogo).
☞ Pizarra
☞ Plumón acrílico
☞

8. BIBLIOGRAFÍA

- COVEÑAS NAQUICHE, Manuel (2007). MATEMÁTICA DE TERCER GRADO. Lima_Perú : BRUÑO.

- LARRUBIA MARTINES, Juan J (2004). RESOLUCION DE ECUCACIONES DE SEGUNDO GRADO CON PUZZLE ALGEBRAICO. Consultado en 02/02/2010 en http://ific.uv.es/fisicaenaccion/actas04/Materialesdidmatematicas.pdf.

- Leitze, A. R. y Kitt, N. A. 2000. Using homemade Algebra Tiles to develop Algebra and Prealgebra conceps. Mathematics Teacher, Vol. 93 issue 6, september, (pag. 462-520).

- MINEDU (2006). GUIAS DE ALGEPLANOS. Lima-Perú.

- MINEDU (2007). GUIA DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJE. Lima_Perú

- MINEDU (2009). DISEÑO CURRICULAR NACIONAL. . Consultado en 22/11/2009 en WWW.minedu.gob.pe.

- SALVADOR TIMOTEO (2005). RAZONAMIENTO MATEMÁTICO SIGLO XXI. Lima-Perú: BRUÑO.

- STONE, Tony Y NICHOLAS, Betty (2004). Polynomials and factoring. . Consultado en 03/02/2010 en http://www.classzone.com/vpg_ebooks/ml_algebra_1_2004/accessibility/ml_algebra_1_2004/page_610.pdf.

- TORI LOZA, Armando (2000). PROBLEMAS DE ALGEBRA Y COMO RESOLVERLOS. Lima-Perú: RACSO.

- TORRES MATTOS, Carlos (2000). ALGEBRA TEORIA Y PRÁCTICA. Lima-Perú: RACSO.

- VERA GUTIÉRREZ, Carlos. E (2007). MATEMÁTICA DE TERCER GRADO. Lima-Perú: BRUÑO.

Sesión Nº 02

Anexo 12:

SESIÓN DE APRENDIZAJE

I.- DATOS DE INFORMACIÓN

Institución Educativa	:"Aurora Inés Tejada"
Director	: Lic. Alfredo Chamorro Meléndez
Profesora de Aula	: Prof. Marlene Chipana Damián
Tesista	: Alex A. Pumacayo Vera
Grado	: Tercero Sección "C" Nº de alumnas 42
Turno	: Tarde
Grupo	: Experimental
Tiempo de Duración	: 80 min Inicio 01:15 pm Final 02:35 pm
Lugar y Fecha	: 12/06/10

II.- TEMAS TRANSVERSALES

- ✓ Educación en valores para la formación ética.

III.- IMPLEMENTACION CURRICULAR

Tema: Presentación y reconocimiento del material didáctico algeplano.	
CAPACIDADES GENERALES	**CAPACIDADES ESPECÍFICAS**
✓ Comunicación matemática ✓ Razonamiento y demostración ✓ Resolución de problemas	✓ Identifica ✓ Reconoce ✓ Representa

APRENDIZAJE ESPERADO

- Identifica, Reconoce las piezas del algeplano y representa expresiones algebraicas

IV.- SECUENCIA METODOLÓGICA

MOMENTOS	ACTIVIDADES	MATERIALES	TIEMPO
INICIO	✓ Presentación del material didáctico algeplano.	✓ algeplanos	10 min
PROCESO	✓ Descripción del material didáctico algeplano.	✓ Papelotes ✓ algeplanos	

	✓ Representación geométrica de los términos de una expresión algebraica con algeplanos. ✓ Ejemplos	✓ Plumón ✓ Pizarra	15 min 50 min
SALIDA	✓ Recomendación y planificación para la clase siguiente.	✓ Cuaderno	5 min

V.- EVALUACIÓN

INDICADORES	TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
✓ Identifica las piezas del algeplano.	✓ Observación sistemática	Lista de cotejo
✓ Reconoce los valores de cada pieza de los algeplanos. ✓ Representa expresiones algebraicas utilizando lápiz y papel	✓ Observación sistemática	✓ Lista de cotejo
✓ Respeta las normas de convivencia del salón.	✓ Observación sistemática	✓ Lista de cotejo

Bibliografía:

- Manuel Coveñas Naquiche (MATEMÁTICA DE TERCER GRADO)
- Carlos. E Vera Gutiérrez (MATEMÁTICA DE TERCER GRADO)
- Ministerio de Educación (GUIAS DE ALGEPLANOS)
- Juan J Larrubia Martines (RESOLUCION DE ECUCACIONES DE SEGUNDO GRADO CON PUZZLE ALGEBRAICO)

....

Profesora de Aula Tesista

Anexo 13: Evidencias del trabajo de campo

Prueba de entrada (pre-test) de 03 alumnas del grupo experimental

INSTITUCIÓN EDUCATIVA "AURORA INÉS TEJADA"

NOTA

PRUEBA INICIAL	UNIDAD ECUACIONES CUADRÁTICAS	
Nombres y Apellidos: Escobar Pedraza Abigail		08.5
Grado: 3 Sección: C Fecha: 09-06-10	Grupo: Experimental	

1. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $4x-2x+5=x-6$

$2x+5=x-6$

$2x-x=-6-5$

$x=-11$

b) $7x-3x-15=3x-10$

$4x-15=3x-10$

$4x-3x=-10+15$

$x=-5$

1

2. Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $(x+3)+2(x-3)-4=2(x-3)=$ $(x+3)+2x-6-4=2x-6$

$(x+3)+2x-6-4=2x-6$

$3x+3-6-4=2x-6$

$3x-2x=-6-3-6-4$

$x=-19$

b) $2(x-3)+5(x+2)=4(x-1)+3=$ $2(x-3)+5(x+2)=4(x-1)+3$

$2x-6+5x+10=4x-4+3$

$2x+5x-6+10=4x-4+3$

$7x-6+10=4x-4+3$

$7x-4x=-4+3-6+10$

$3x=1-6+10$

$3x=15$

$x=\frac{15}{3}$

$\boxed{x=5}$

0

3. Calcular el valor numérico del polinomio.

a) x^2+3x+2, para $x=-4$

$(4)^2+3(4)+2$

$16-12+2$

$4+2=6$

b) $2x^2-6x+9$, para $x=3$

$2(3)^2-6(3)+9$

$2(9)-18+9$

$18-27$

-9

1.5

4. Multiplicar las siguientes expresiones polinómicas.

a) $(x+2)(x-5) = x^2 - 5x + 2x - 10$

$x^2 - 7x - 10$

b) $(5x-3)(x+2) = 5x^2 - 10x + (-3x) - 6$

$5x^2 - 10x - 3x - 6$

$5x^2 - 13x - 6$

0

5. Desarrolla y simplifica el resultado:

a) $(x-4)^2 = \{\, x^2 - 2(x)(4) - 4^2$

$x^2 - 8x - 16 \,\}$

b) $(4x+2)^2 = 16x^2 + 2(4x)(2) + 2^2$

$16x^2 + 16x + 4 \,\}$

1.5

6. Desarrolla y simplifica el resultado:

a) $(x+5)^2 - 9 = x^2 + 2(x)(5) + 5^2 - 9$

$x^2 + 10x + 25 - 9$

$x^2 + 10x + 16 \,\}$

b) $(4x-2)^2 - 10 = 16x^2 - 2(4x)(2) + 2^2 - 10$

$16x^2 - 16x - 4 - 10$

$16x^2 - 16x - 14 \,\}$

1.5

7. Completa la siguiente expresión del mismo modo que se hace en el ejemplo.

Ejemplo: $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$

a) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

b) $4x^2 + 24x + 9 = (2x + 3)^2$

$4x^2 + 24x + 9 = (2x + 3)^2$

3

INSTITUCIÓN EDUCATIVA "AURORA INÉS TEJADA"

NOTA

PRUEBA INICIAL	UNIDAD ECUACIONES CUADRÁTICAS	08
Nombres y Apellidos: Karen Román Vargas		
Grado: 2do Sección: C Fecha: 09-06-10 Grupo: Experimental		

1. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $4x-2x+5=x-6$

$4x-2x-x=-5-6$

$2x-x=11$

$x=11$

b) $7x-3x-15=3x-10$

$7x-3x-3x=+15-10$

$4x-3x=5$

$1x=5$

$x=5$

2

2. Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $(x+3)+2(x-3)-4=2(x-3)$

$4x+2x-6-4=2x-6$

$6x-6-4=4x$

$6x-4x=6+4$

$2x=10$

$2x=10$

$x=\frac{10}{2}$

$x=5$

b) $2(x-3)+5(x+2)=4(x-1)+3$

$2x-6+5x+10=4x-4+3$

$-4x+15x=x+3$

$11x-4x$

$=7x$

0

3. Calcular el valor numérico del polinomio.

a) x^2+3x+2, para $x=-4$

$(-4)^2+3(4)+2$

$-16+-12+2$

$-28+2=-26$

b) $2x^2-6x+9$, para $x=3$

$2(3)^2-6(3)+9$

$36-18+9$

$18+9$

$=27$

0

4. Multiplicar las siguientes expresiones polinómicas.	
a) $(x+2)(x-5) =$ $x^2 + 5x + 2x - 10$ $x^2 + 7x - 10$	1.5
b) $(5x-3)(x+2) =$ $5x^2 - 10x + 3x + 6$	
5. Desarrolla y simplifica el resultado:	
a) $(x-4)^2 =$ $x^2 - 8x + 16$	3
b) $(4x+2)^2 =$ $16x^2 + 8x + 8x + 4$ $16x^2 + 16x + 4$	
6. Desarrolla y simplifica el resultado:	
a) $(x+5)^2 - 9 =$ $x^2 + 5x + 5x + 25 - 9$ $x^2 + 10x + 16$	1.5
b) $(4x-2)^2 - 10 =$ $8x - 8x - 8x - 4 - 10$ $16 - 8x - 6$ $16 - 6 - 8x$ $10 - 8x$	
7. Completa la siguiente expresión del mismo modo que se hace en el ejemplo.	
Ejemplo: $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$	
a) $x^2 - 4x + \_ = (x - \_)^2$	0
b) $4x^2 + \_ + 9 = (\_ + \_)^2$	

INSTITUCIÓN EDUCATIVA "AURORA INÉS TEJADA"

NOTA

09

PRUEBA INICIAL	UNIDAD ECUACIONES CUADRÁTICAS
Nombres y Apellidos: mayumi Quispe Gonzales	
Grado: 3ro Sección: "C" Fecha: 09-06-2010 Grupo: Experimental	

1. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $4x-2x+5=x-6$

$4x-2x-x=6-5$
$2x-x=1$
$x=1$

b) $7x-3x-15=3x-10$

$7x-3x-3x=10+15$
$4x-3x=25$
$x=25$

0

2. Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $(x+3)+2(x-3)-4=2(x-3)$

$x+3+2x-6-4=2x-6$
$x+2x-2x=6-3+6+4$
$3x-2x=3+10$
$x=13$

b) $2(x-3)+5(x+2)=4(x-1)+3$

$2x-6+5x+10=4x-4+3$
$2x+5x-4x=4+3+6-10$ $x=1$
$7x-4x=13-10$
$3x=3$
$x=\frac{3}{3}$

0

3. Calcular el valor numérico del polinomio.

a) x^2+3x+2, para $x=-4$

$(-4)^2+3(-4)+2=-2$
$16+-12+2$
$-4+2$

b) $2x^2-6x+9$, para $x=3$

$2(3)^2-6(3)+9$
$2\cdot 9-18+9=9$
$18-18+9$
$0+9$

1.5

4. Multiplicar las siguientes expresiones polinómicas.
a) $(x+2)(x-5)=$ $x^2+5x+2x-10$ $x^2+7x-10$ b) $(5x-3)(x+2)=$ $5x^2-10x+-3x+-6$ $5x^2-13x+-6$ 0

5. Desarrolla y simplifica el resultado:
a) $(x-4)^2=$ $x-4$ / $x-4$ ⇒ x^2-4x / $+4x+16$ / $x^2-8x+16$ b) $(4x+2)^2=$ $4x+2$ / $4x+2$ ⇒ $16x^2+8x$ / $+8x+4$ ⇒ $16x^2+16x+4$ 3

6. Desarrolla y simplifica el resultado:
a) $(x+5)^2-9=$ $x+5$ / $x+5$ ⇒ x^2+5x / $+5x+25$ / $x^2+10x+25$ ⇒ $x^2+10x+25-9$ / $x^2+10x+19$ b) $(4x-2)^2-10=$ $4x-2$ / $4x-2$ ⇒ $16x^2-8x$ / $-8x+4$ ⇒ $16x^2-16x+4-10$ / $16x^2-16x(-6)$ 1.5

7. Completa la siguiente expresión del mismo modo que se hace en el ejemplo.
Ejemplo: $x^2-8x+16=(x-4)^2$ a) $x^2-4x+4=(x-2)^2$ $x-2$ / $x-2$ ⇒ x^2-2x / $-2x+4$ / x^2-4x+4 b) $4x^2+12x+9=(2x+3)^2$ $2x+3$ / $2x+3$ ⇒ $4x^2+6x$ / $+6x+9$ / $4x^2+12x+9$ 3

Anexo Nº: 14

Prueba de salida (post-test), de 03 alumnas del grupo experimental

INSTITUCIÓN EDUCATIVA "AURORA INÉS TEJADA"

PRUEBA FINAL	UNIDAD ECUACIONES CUADRÁTICAS	NOTA
Nombres y Apellidos: Escobar Pedraza Abigail		16
Grado: 3º ....Sección: C..... Grupo:	Nº 16	

1. Desarrolla y simplifica el resultado de:

a) $(x+4)^2 =$

$x^2 + 8x + 16$ ✓

b) $(x+5)^2 - 9 =$

$x+5$

1.5

2. Completa la siguiente expresión del mismo modo que se hace en el ejemplo.

Ejemplo: $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$

a) $4x^2 + 12x + \underline{9} = (\underline{2x} + \underline{3})^2$

$2x+3$

$(2x+3)(2x+3) = (2x+3)^2$ ✓

b) $x^2 - \underline{4x} + 4 = (\underline{x} - \underline{2})^2$

$x-2$

$(x-2)(x-2) = (x-2)^2$ ✓

3

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 - 5x = 0$

$2x - 5$

$\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow 2x - 5 = 0$

$x = \frac{5}{2}$ ✓

b) $2x^2 - 8 = 0$

$2x + 4$

$\Rightarrow x - 3 = 0$

$x = 3$

$\Rightarrow 2x + 4 = 0$

$2x = -4$

$x = -\frac{4}{2} = -2$ ✗

c) $(x+6)(2x+1) = 0$

$\Rightarrow x + 6 = 0$

$x = -6$

$\Rightarrow 2x + 1 = 0$

$x = \frac{-1}{2}$ ✓

d) $(x-4)^2 - 4 = 0$

$\sqrt{(x-4)^2} = -\sqrt{-4}$

$x - 4 = +2$

$x = \frac{2}{-4} = 2$

$x - 4 = -2$ ✗

$x = \frac{+2}{4} = 2$

1.5

4. Formar una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones:

a) $x_1 = -3, x_2 = -2$

$S = {}^-3 + {}^-2 = 5$

$P = {}^-3 \cdot {}^-2 = {}^-6$

$x^2 + 5x - 6$

$CS = (5, {}^-6)$

b) $x_1 = +\frac{1}{2}, x_2 = +2$

$S = \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$

$P = \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{2}{2} = 1$

$CS = (\frac{3}{2}, 1)$

0.5

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $-4x^2 + 8x - 4 = 0$

$4x^2 - 8x + 4 = 0$

$2x - 2$

x^2 x^2 $-x$

$2x - 2$

x^2 x^2

$-x$ $-x$

$\Rightarrow 2x - 2 = 0$ $\Rightarrow 2x - 2 = 0$

$x = \frac{2}{2}$ $x = \frac{2}{2}$

$x = 1$ $x = 1$

b) $3x^2 + 15x + 18 = 0$

$3x + 6$

$x + 3$

x^2 x^2 x^2 x x x x x x

x x x

$\Rightarrow 3x + 6 = 0$

$x = \frac{-6}{3} = {}^-2$

$\Rightarrow x + 3 = 0$

$x = -3$

3

6. Resuelve por método de completar cuadrado la ecuación $4x^2 - 12x + 8 = 0$

$2x - 3$

$2x - 3$

x^2 x^2 $-x$ $-x$

x^2 x^2 $-x$ $-x$

$-x$ $-x$

$+ \boxed{-1}$

$(2x-3)^2 - 1$

$\sqrt{(2x-3)^2} = \mp\sqrt{-1}$

$2x - 3 = \sqrt{-1}$

$2x - 3 = 1$

$2x = 1 + 3$

$x = \frac{4}{2}$ $x = 2$

$2x - 3 = \mp\sqrt{1}$

$2x - 3 = {}^-1$

$2x = {}^-1 + 3$

$x = \frac{+2}{2}$

$x = +1$

3

7. En la ecuación $x^2 - 5x + c = 0$, una solución es. $x = 2$. Calcular el valor de "c" y el de la otra solución.

$(2)^2 - 5(2) + c = 0$

$4 - 10 + c = 0$

$~~c = -10 + 4~~$

$~~c = -14~~$

$4 - 10 = c$

$6 = c$

$x^2 - 5x + 6$

$x - 3$

$x - 2$

x^2 $-x$ $-x$

$-x$

$\Rightarrow x - 3 = 0$

$x = 3$

$\Rightarrow x - 2 = 0$

$x = 2$

3

INSTITUCIÓN EDUCATIVA "AURORA INÉS TEJADA"

PRUEBA FINAL	UNIDAD ECUACIONES CUADRÁTICAS	NOTA
Nombres y Apellidos: Karen Román Vargas		15
Grado: 3.° ....Sección: "C"..... Grupo:		

1. Desarrolla y simplifica el resultado de:

a) $(x+4)^2 = (x+4)(x+4)$

$x^2+8x+16$

b) $(x+5)^2-9 = (x+5)(x+5)^2-9$

1.5

2. Completa la siguiente expresión del mismo modo que se hace en el ejemplo.

Ejemplo: $x^2-8x+16=(x-4)^2$

a) $4x^2+12x+\underline{9}=(\underline{2x}+\underline{3})^2$

$(2x+3)(2x+3)=(2x+3)^2$

b) $x^2-\underline{4}+4=(\underline{x^2}-\underline{2})^2$

$(x^2-2)(x^2-2)=(x^2+2)^{2}$

1.5

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2-5x=0$

$x=0$

$2x-5=0$

$x=\frac{-5}{2}$

b) $2x^2-8=0$

$2x-4=0 \Rightarrow x=4/2$

$2x-4=0 \Rightarrow x=4/2$

2.5

c) $(x+6)(2x+1)=0$

$(x+6)=0 \Rightarrow x=-6$

$(2x+1)=0 \Rightarrow x=\frac{-2}{1}=-1$

d) $(x-4)^2-4=0$

$\sqrt{(x-4)^2}=\pm\sqrt{4}$

$(x-4)=\pm\sqrt{4}$

$x_1=+\sqrt{4}+4$

$x_2=-\sqrt{4}+4$

4. Formar una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones:

a) $x_1 = -3, x_2 = -2$

$x_1 = -3 \quad x_2 = -2$

$S = -3 + -2 = 5$

$P = -3 \cdot -2 = -6$

$x^2 + 5x - 6$

X

b) $x_1 = +\frac{1}{2}, x_2 = +2$

$S = \frac{1}{2} + 2 =$

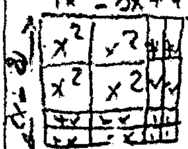
$P = \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{2}{2} = 1$

X 0.5

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $-4x^2 + 8x - 4 = 0$

$1x^2 - 8x + 4 = 0 \rightarrow 2x \div 2$



$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2/2 = 1$

$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2/2 = 1$

✓

b) $3x^2 + 15x + 18 = 0$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

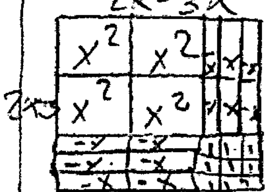
$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

✓ 3

6. Resuelve por método de completar cuadrado la ecuación $4x^2 - 12x + 8 = 0$

$2x - 3x$



$(2x-3)^2 = 1$

$\sqrt{(2x-3)^2} = \pm\sqrt{1}$

$2x - 3 = \pm\sqrt{1}$

$2x - 3 = 1$

$2x = 1 + 3 \quad x = \frac{4}{2} = x = 2$

$2x - 3 = \pm\sqrt{1}$

$2x - 3 = 1$

$2x = -1 + 3$

$x = \frac{+2}{2}$

$= +1$ X

3

7. En la ecuación $x^2 - 5x + c = 0$**, una solución es.** $x = 2$**. Calcular el valor de "c" y el de la otra solución.**

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(2)^2 - 5(2) + c = 0$

$4 - 10 + c = 0$

$-6 + c = 0$

$c + 6$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x - 3$

$x - 3 = 0 \Rightarrow 3$

$x - 2 = 0 \Rightarrow 2$

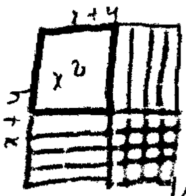
✓ 2.5

INSTITUCIÓN EDUCATIVA "AURORA INÉS TEJADA"

PRUEBA FINAL	UNIDAD ECUACIONES CUADRÁTICAS	NOTA
Nombres y Apellidos:..		14
Grado:...... ....Sección: .... Grupo:		

1. Desarrolla y simplifica el resultado de:

a) $(x+4)^2 =$ $(x+4)(x+4) = 0$

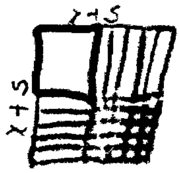


$x^2 + 4x + 4x + 16$

$x^2 + 16x + 16$

$x(x+4)^2 = x^2 + 16x + 16$

b) $(x+5)^2 - 9 =$



$(x+5)(x+5) - 9 =$

$x^2 + 10x + 26 - 9$

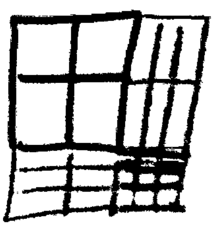
$x^2 + 10x + 16$

1.5

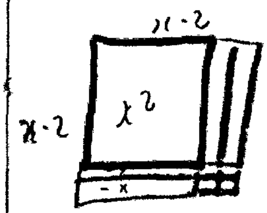
2. Completa la siguiente expresión del mismo modo que se hace en el ejemplo.

Ejemplo: $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$

a) $4x^2 + 12x +$ <u>9</u> $= ($<u>2x</u>$+$<u>3</u>$)^2$



b) $x^2 -$ <u>4x</u> $+ 4 = ($<u>x</u> $-$ <u>2</u>$)^2$



3

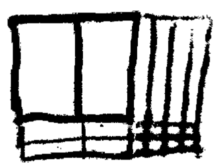
3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2 - 5x = 0$

$2x + 5 = 0 \Rightarrow + \frac{2}{5}$

$2x - 5 = 0 \rightarrow \frac{2}{5}$

b) $2x^2 - 8 = 0$



$x + 4 = 0 \Rightarrow 4$

$2x + 4 = 0 \rightarrow -\frac{4}{2} = 1$

1

c) $(x+6)(2x+1) = 0$

$x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$

$2x + 4 = = \frac{-2}{1} = -6$

d) $(x-4)^2 - 4 = 0$

$\sqrt{(x-4)^2} = \pm\sqrt{4}$

$(x-4) = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = +\sqrt{4} + 4$

$x_2 = -\sqrt{4} + 4$

4. Formar una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones:

a) $x_1 = -3, x_2 = -2$

$S: x_1 + x_2 = -3 + (-2) : 3 + 2 = 5$

$P: x_1 \cdot x_2 : -3 \cdot (-2) : -6$

$x^2 + 5x + 8 = 0$

$, 2 + 5 - 6$ ✗

X

b) $x_1 = +\frac{1}{2}, x_2 = +2$

$S = x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + (2) ; = \frac{1}{2} + \frac{2}{1}$ ...

$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2} \cdot (2)$ ...

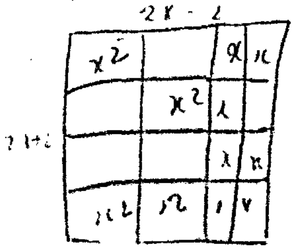
$x^2 + Sx + P = 0$

$x^2 + \frac{5}{2} \cdot 4$ ✗

0.5

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $-4x^2 + 8x - 4 = 0$



$2x + 2 = 0$

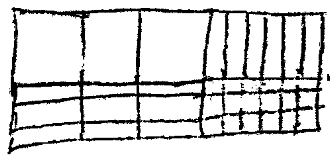
$2x + 2 = 0$

$x = \frac{2}{2} = 1$ ✗

$x = \frac{2}{2} = 1$ x

✓

b) $3x^2 + 15x + 18 = 0$

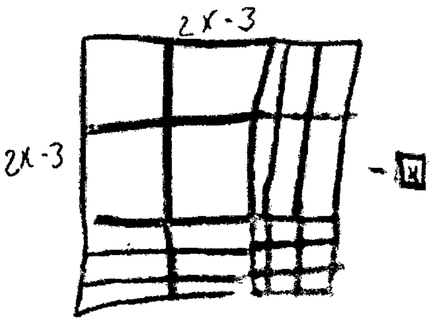


$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$3x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6}{3} = -2$ ✗

✓ 3

6. Resuelve por método de completar cuadrado la ecuación $4x^2 - 12x + 8 = 0$



$2x - 3 + 1 = 0$ ✗

$\sqrt{(2x-3)^2} = \pm\sqrt{1}$

$(2x-3) = \pm\sqrt{1}$

$2x_1 = +\sqrt{1} + 3$

$2x_2 = -\sqrt{1} + 3$ ✗

$x_1 = \frac{+\sqrt{1} + 3}{2}$

$= x_2 = \frac{-\sqrt{1} + 3}{2}$

✓ 3

7. En la ecuación $x^2 - 5x + c = 0$, una solución es. $x = 2$. Calcular el valor de "c" y el de la otra solución.

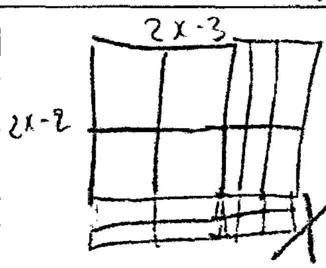
$(2)^2 - 5(2) + c = 0$

$4 - 10 + c = 0$

$4 - 10 = c$

$+6 = c$ ✗

✓



X

1.5

Representación de ecuaciones cuadráticas, en el cuadernillo de actividades y ejercicios.

Actividades y Ejercicios con Algeplano® ALEX PUMACAYO - LUIS ALATA

b) $2x^2+3x-5$

Seleccionando las piezas del Algeplano obtenemos.

c) $4x^2+8x-12$

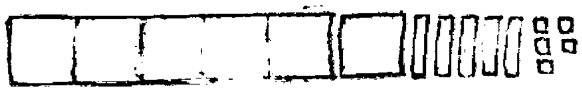
Seleccionando las piezas del Algeplano obtenemos.

d) $2x^2+10x-3x-4$

Seleccionando las piezas del Algeplano obtenemos.

e) $5x^2-x^2+x-4x-5$

Seleccionando las piezas del Algeplano obtenemos.



Recuerda la clase de la forma general de una ecuación cuadrática:

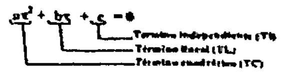
$$\boxed{ax^2+bx+c=0}$$

Donde a, b y c son llamados coeficientes y X es la variable de la ecuación.

- El coeficiente "a" se llama coeficiente **cuadrática o de segundo grado**
- El coeficiente "b" se llama coeficiente **lineal o de primer grado**
- El coeficiente "c" se llama termino **lineal**

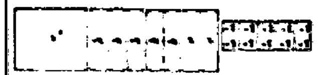
Actividades y Ejercicios con Algeplano® ALEX PUMACAYO - LUIS ALATA

Términos de una ecuación



3) Dada las siguientes representaciones geométricas, encontrar la representación simbólica e indicar sus coeficientes y términos.

Ejemplo. Dada la siguiente representación geométrica, simplifica e indica sus coeficientes y términos.

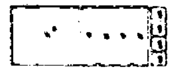
 $= 0$

Resolución

Simplificando los términos obtenemos la expresión de 2° grado: $\boxed{1x^2-3x-10=0}$

Donde:

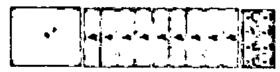
- ✓ Los coeficientes son: a = 1, b = -3 y c = -10
- ✓ Los términos son: $TC = x^2, TL = -3x, TI = -10$

a)  $= 0$

Simplificando los términos obtenemos la expresión de 2° grado: $\boxed{1x^2+4x+4=0}$

Donde:

- ✓ Los coeficientes son: a = ...1..., b = ...4... y c = ...4.....
- ✓ Los términos son: TC = $1x^2$..., TL = ..4x.., TI = ...4....

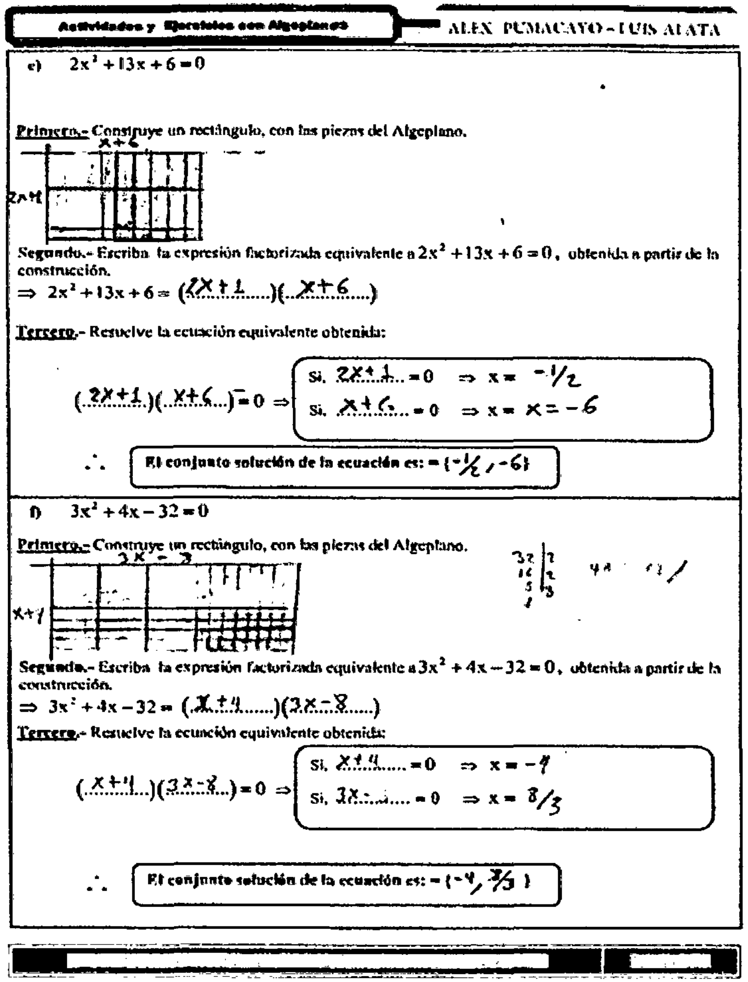
b)  $= 0$

Simplificando los términos obtenemos la expresión de 2° grado: $\boxed{1x^2-9x-8=0}$

Donde:

- ✓ Los coeficientes son: a = ..1.., b = ..-9.. y c = ...-8...
- ✓ Los términos son: TC = ..x^2..., TL = -9x, TI = ..-8...

Representación en forma factorizada y resolución de ecuaciones cuadráticas en el cuadernillo



Actividades y Ejercicios con Algeplanos — ALEX PUMACAYO - LUIS ALATA

e) $2x^2+13x+6=0$

Primero.- Construye un rectángulo, con las piezas del Algeplano.

x+6

2x+1

Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $2x^2+13x+6=0$, obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow 2x^2+13x+6=$ (2X+1)(X+6)

Tercero.- Resuelve la ecuación equivalente obtenida:

(2X+1)(X+6)=0 $\Rightarrow$ Si, 2X+1 = 0 $\Rightarrow$ x = $-1/2$; Si, X+6 = 0 $\Rightarrow$ x = X = −6

∴ El conjunto solución de la ecuación es: = {−1/2, −6}

f) $3x^2+4x-32=0$

Primero.- Construye un rectángulo, con las piezas del Algeplano.

3X − 8

X+4

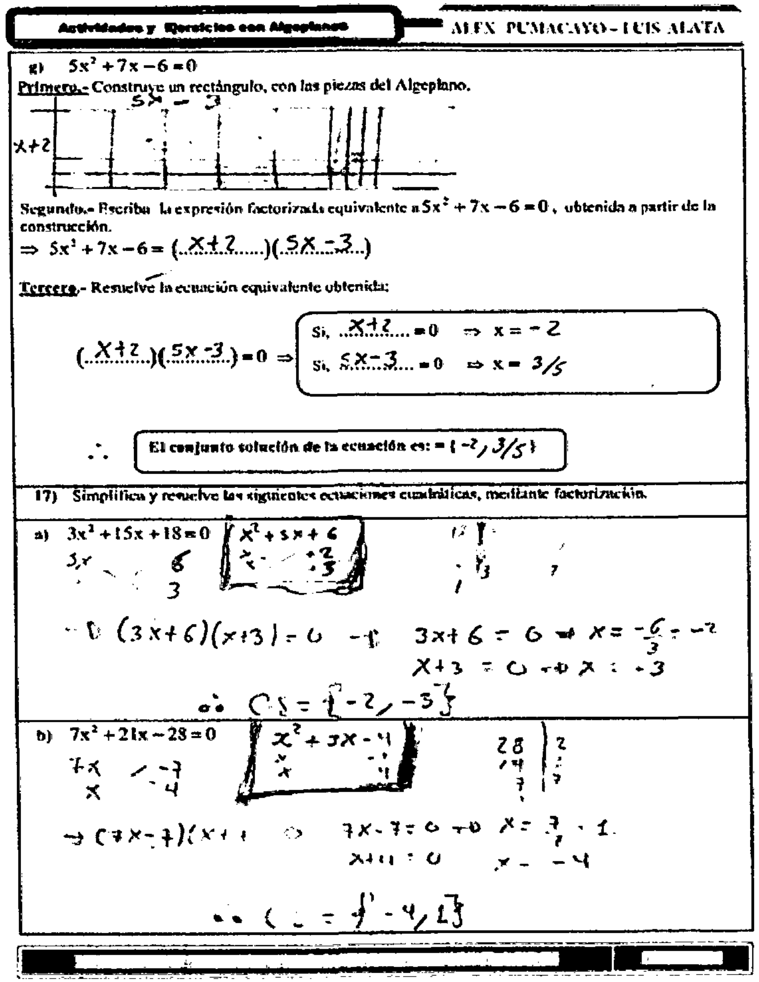
Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $3x^2+4x-32=0$, obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow 3x^2+4x-32=$ (X+4)(3X−8)

Tercero.- Resuelve la ecuación equivalente obtenida:

(X+4)(3X−8)=0 $\Rightarrow$ Si, X+4 = 0 $\Rightarrow$ x = −4; Si, 3X−8 = 0 $\Rightarrow$ x = 8/3

∴ El conjunto solución de la ecuación es: = {−4, 8/3}



Actividades y Ejercicios con Algeplanos — ALEX PUMACAYO - LUIS ALATA

g) $5x^2+7x-6=0$

Primero.- Construye un rectángulo, con las piezas del Algeplano.

5X − 3

X+2

Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $5x^2+7x-6=0$, obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow 5x^2+7x-6=$ (X+2)(5X−3)

Tercero.- Resuelve la ecuación equivalente obtenida:

(X+2)(5X−3)=0 $\Rightarrow$ Si, X+2 = 0 $\Rightarrow$ x = −2; Si, 5X−3 = 0 $\Rightarrow$ x = 3/5

∴ El conjunto solución de la ecuación es: = {−2, 3/5}

17) Simplifica y resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas, mediante factorización.

a) $3x^2+15x+18=0$

x^2+5x+6

$\Rightarrow (3x+6)(x+3)=0 \Rightarrow 3x+6=0 \Rightarrow x=-\frac{6}{3}=-2$

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$

∴ C.S = {−2, −3}

b) $7x^2+21x-28=0$

x^2+3x-4

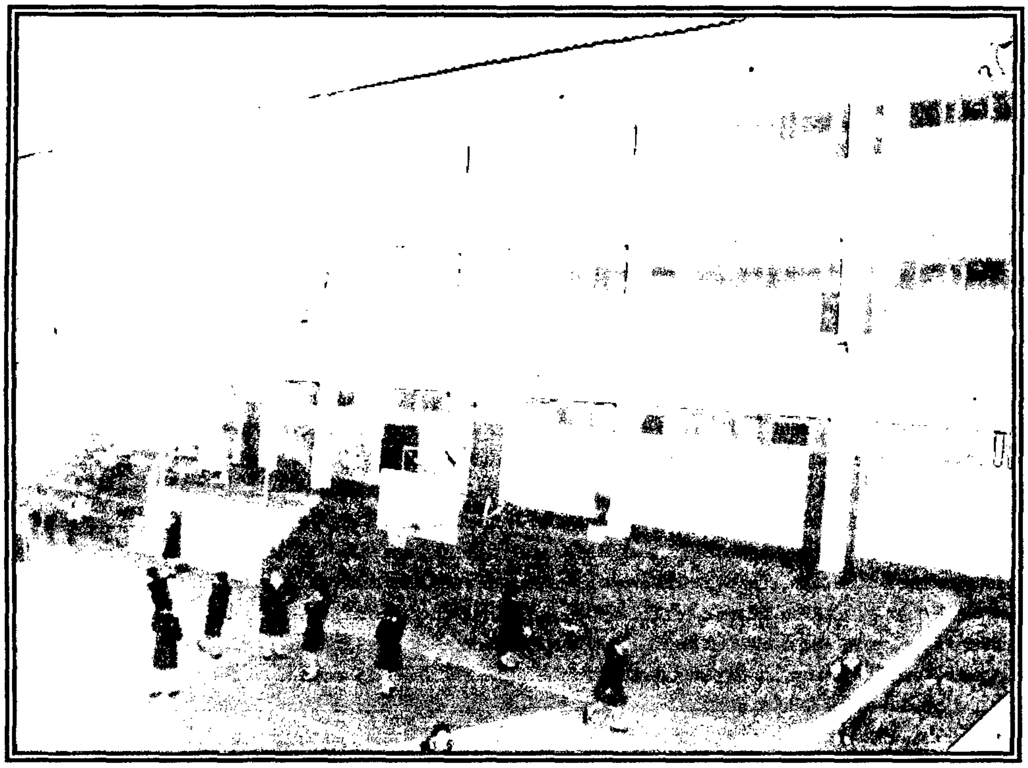
$\Rightarrow (7x-7)(x+4) \Rightarrow 7x-7=0 \Rightarrow x=\frac{7}{7}=1$

$x+4=0 \qquad x=-4$

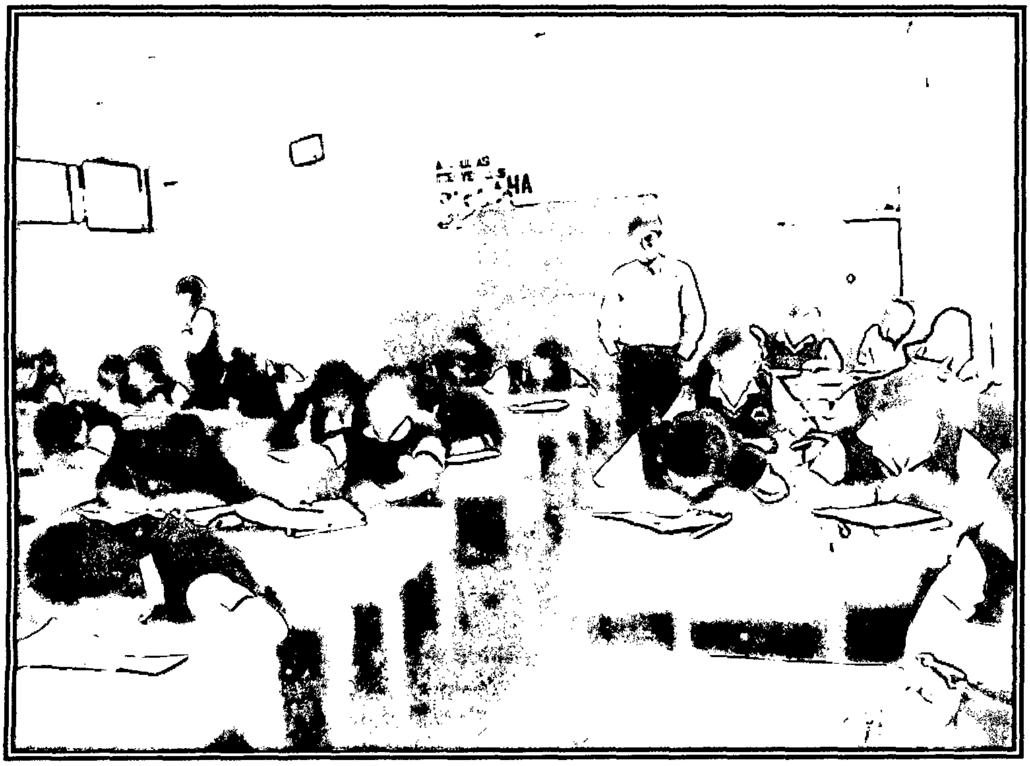
∴ C.S = {−4, 1}

Anexo 15:
Fotos de la ejecución del proyecto de investigación.

I.E. Aurora Inés Tejada

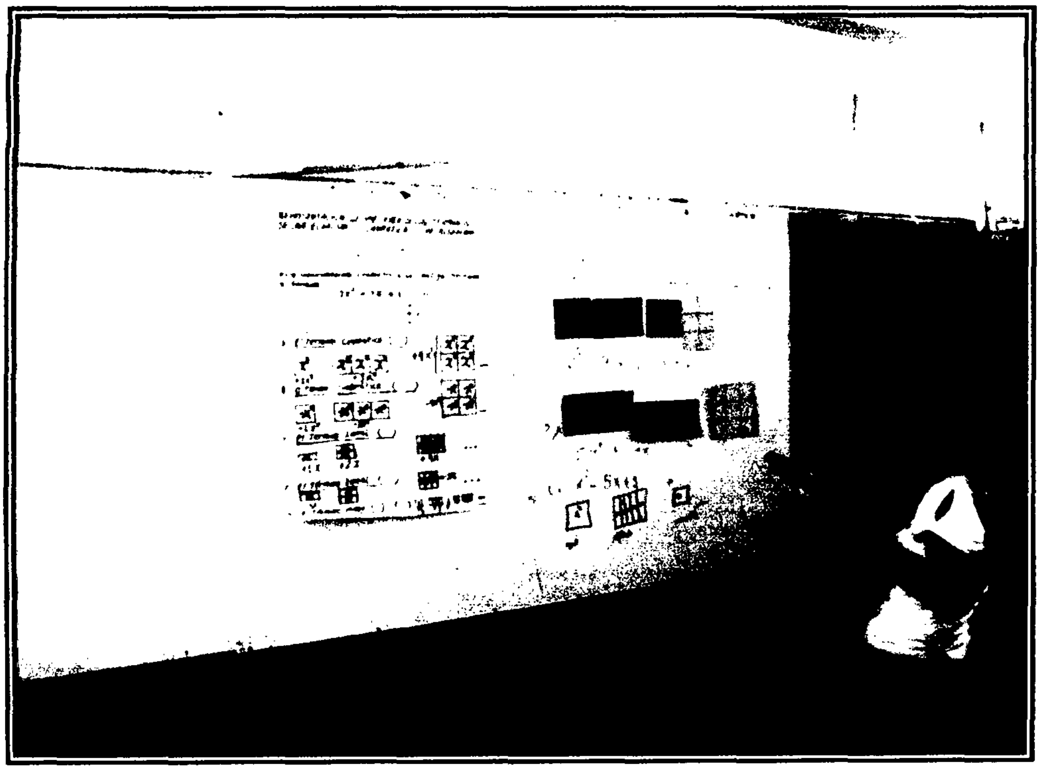


Aplicación de la prueba de entrada o pre-test

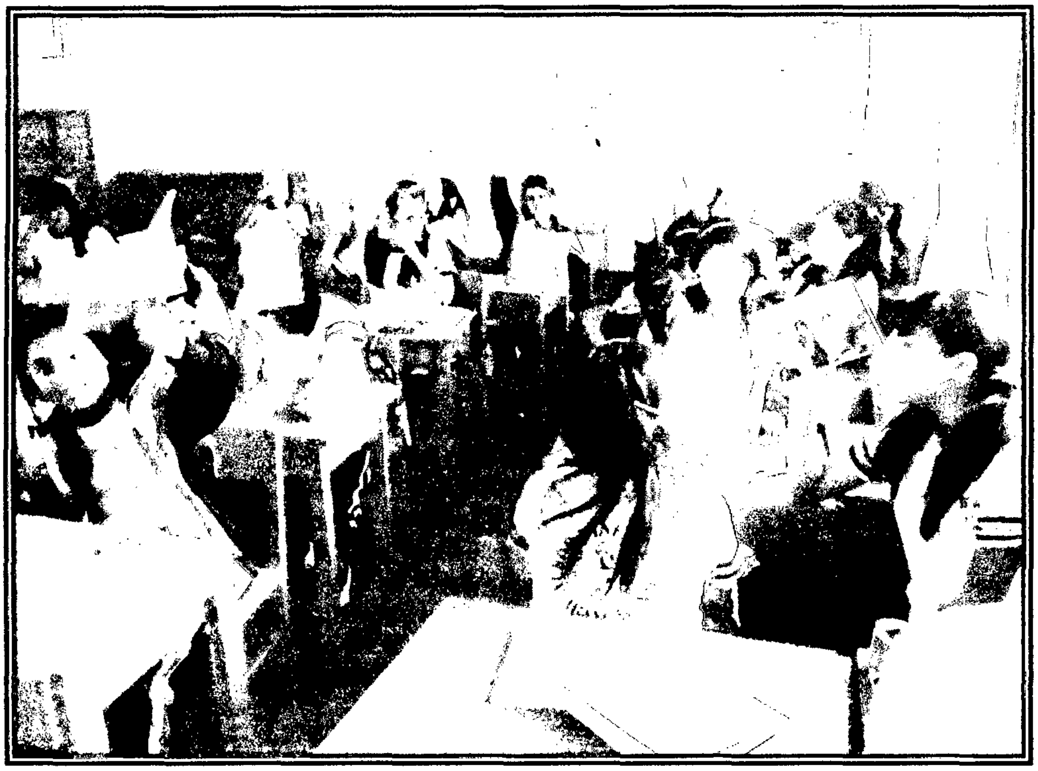


Material didáctico algeplano, guía teórica y cuadernillos de actividades y ejercicios

Introducción y reconocimiento del material didáctico algeplano



Distribución de cuadernillos



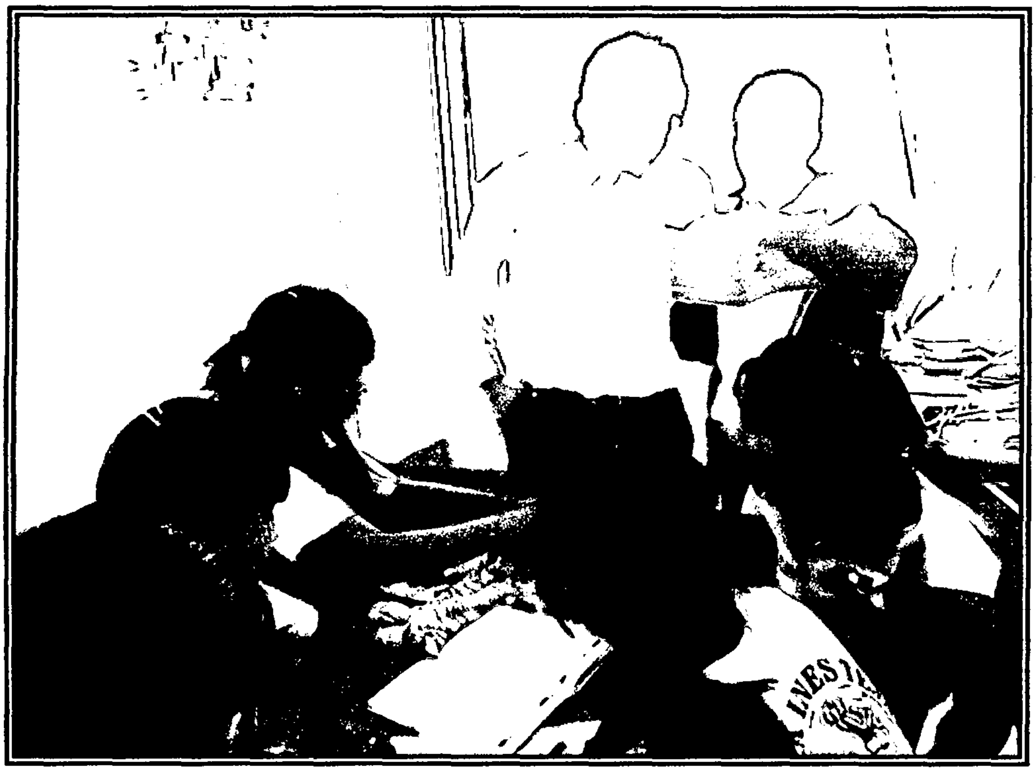
Desarrollo de la unidad de ecuaciones cuadráticas con el apoyo del material didáctico algeplano

- **Representación de las ecuaciones cuadráticas con los algeplanos**

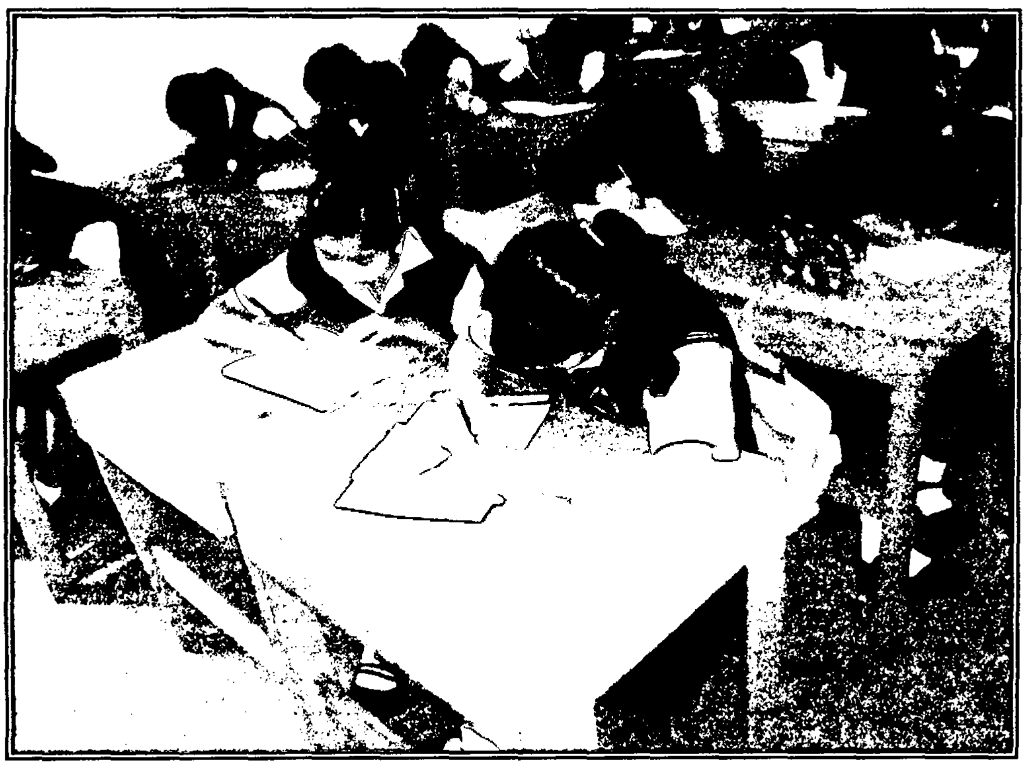
- **Resolución de las ecuaciones cuadráticas con el apoyo de los algeplanos**

- **Desarrollo de actividades y ejercicios**

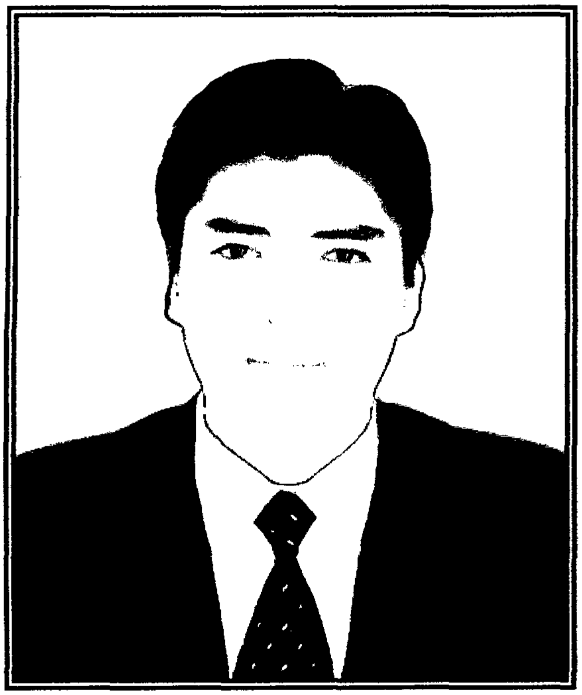
➢ **Desarrollo de actividades y ejercicios**



<u>Prueba de salida o post- test</u>



Responsables de la ejecución del proyecto de investigación



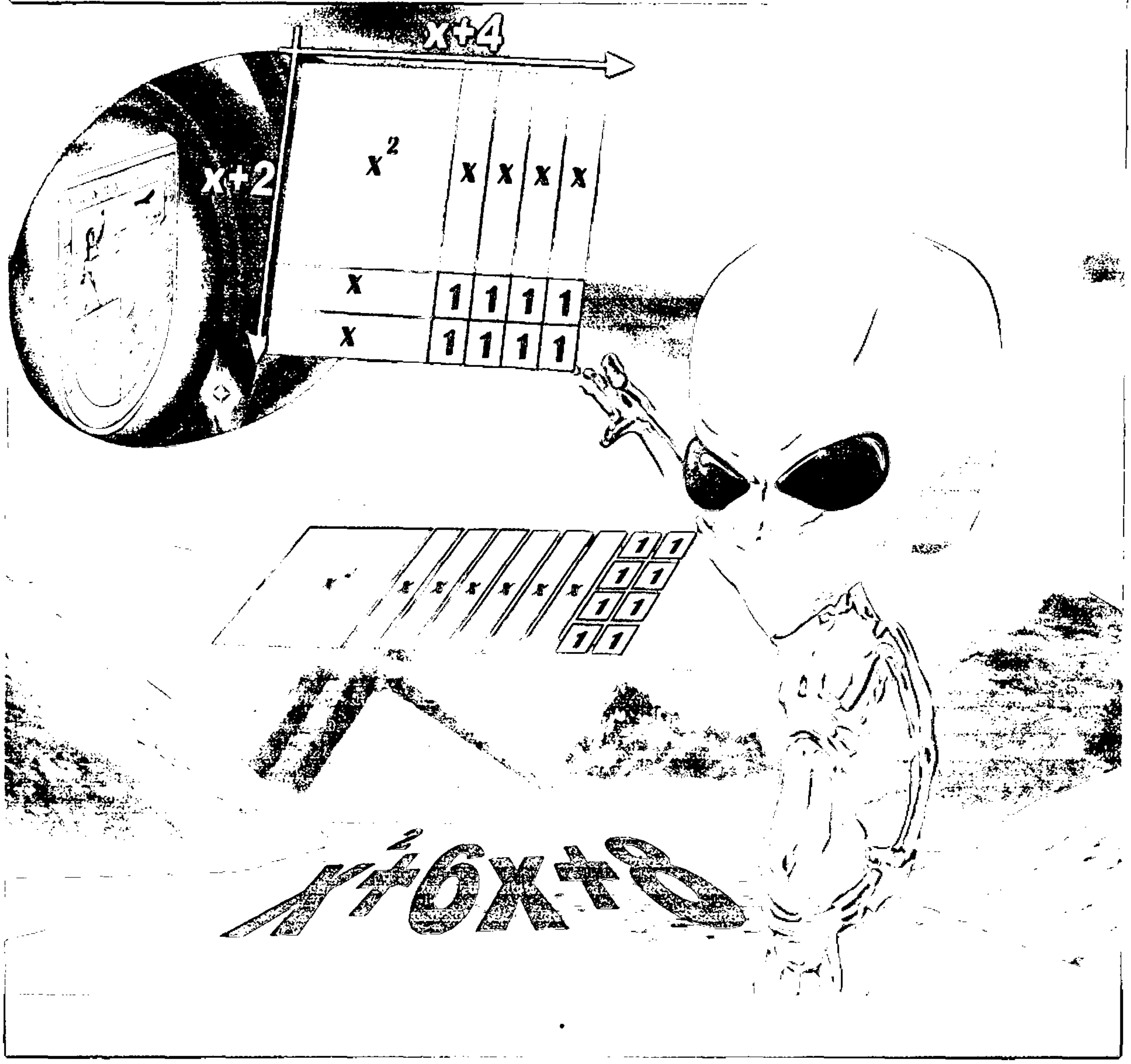
Bach. ALEX A. PUMACAYO VERA

Bach. LUÍS A. ALATA NARVAEZ

REPRESENTACIÓN Y RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

CON ALGEPLANOS

GUÍA TEÓRICA



ALEX A. PUMACAYO VERA
LUIS A. ALATA NARVAEZ

APURIMAC-PERU

Representación y resolución de ecuaciones cuadráticas con algeplanos

CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN

En un intento de introducir a los estudiantes en el mundo de las ecuaciones cuadráticas, con una visión lúdica, concreta, con experiencias agradables, se propone el uso de un material didáctico denominado ***ALGEPLANO***, que intenta ofrecer una nueva estrategia para fortalecer en la enseñanza - aprendizaje de los estudiantes.

El material didáctico algeplano esta compuesta por conjunto de piezas ***positivas*** denominado (cuadrado grande azul, rectángulo verde, cuadrado pequeño amarillo) y las ***negativas*** (cuadrado grande rojo, rectángulo rojo y cuadrado pequeño rojo), cada una de ellas representan los términos de una expresión algebraica.

En el manual se desarrolla diferentes praxis tales como las representaciones geométricas de los diferentes tipos o formas de ecuaciones cuadráticas de una sola variable con coeficientes enteros, y la resolución de ecuaciones cuadráticas en el cual los algeplanos se utilizan para construir rectángulos y/o cuadrados, el calculo del área de estas figuras permite obtener expresiones mas sencillas en forma factorizada o en forma de binomio al cuadrado equivalentes a la ecuación cuadrática presentada inicialmente.

Para dar solución se realiza procedimientos algebraicos; como producto de dos factores cuyo resultado es cero o el criterio de la raíz, a la expresión más sencilla de la ecuación general presentada inicialmente.

I. USO DEL MATERIAL DIDÁCTICO ALGEPLANO

El uso del material didáctico está orientado a la representación geométrica de ecuaciones cuadráticas de una variable y con coeficientes enteros. Las operaciones básicas como la adición, sustracción, multiplicación y división e incluye la factorización de trinomios se pueden realizar aplicando agrupaciones y organizando secuencias concretas con las fichas, teniendo en cuenta su color, forma y símbolo asignado.

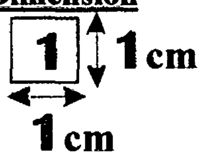
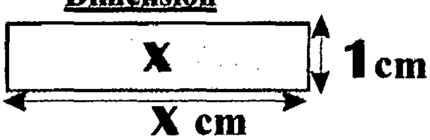
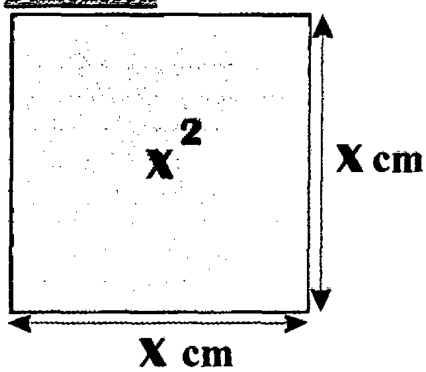
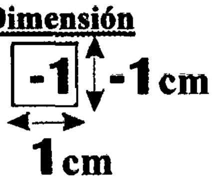
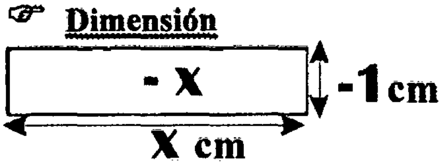
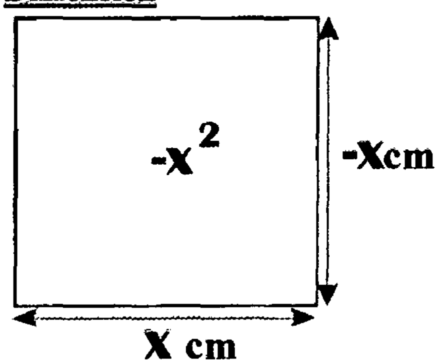
Para los estudiantes que siempre han presentado directamente las variables en forma simbólica y literal, podría parecerles novedoso crear expresiones y operaciones algebraicas usando piezas de figuras geométricas como las de algeplano. Por otro lado, para estudiantes que recién se inician en la representación de ecuaciones cuadráticas y en las operaciones de términos algebraicos, constituirá un "proceso natural" de aprendizaje, que parte de lo concreto y lo transporta al mundo abstracto del lenguaje algebraico.

II. DESCRIPCIÓN DEL MATERIAL DIDÁCTICO ALGEPLANO

Nominamos algeplanos a un conjunto de piezas de figuras geométricas planas, formada por cuadrados y rectángulos, hechos de un material micro poroso grueso, no toxico, y en colores variados para estimular la percepción visual.

Un juego de algeplano contiene un total de 164 piezas. Se distinguen en dos tipos según su forma (cuadrado y rectángulo), tres tipos según su tamaño (cuadrado grande, rectángulo y cuadrado pequeño) y dos tipos según su valor (positivo y negativo).

NOTA*: *El valor de X es igual a 4.5 cm para elaborar el material.

Cuadrado de área 1 (positivo)	**Rectángulo de área X (positivo)**	**Cuadrado de área X^2 (positivo)**
Nombre Cuadrado pequeño amarillo (positivo). **Dimensión**  **Cantidad** 49 Unidades	**Nombre** Rectángulo verde (positivo) **Dimensión**  **Cantidad** 24 Unidades	**Nombre** Cuadrado grande azul (positivo) **Dimensión**  **Cantidad** 9 Unidades
Cuadrado de área -1	**Rectángulo de área –X**	**Cuadrado de área $-X^2$**
Nombre Cuadrado pequeño rojo (negativo). **Dimensión**  **Cantidad** 49 Unidades	**Nombre** Rectángulo rojo (negativo) **Dimensión**  **Cantidad** 24 Unidades	**Nombre** Cuadrado grande rojo (negativo) **Dimensión**  **Cantidad** 9 Unidades

A pesar de que las áreas y las medidas de los lados de los rectángulos no pueden ser negativas, en la representación desarrollada, las piezas negativas, representan figuras con área negativa puesto que uno de sus lados es negativo.

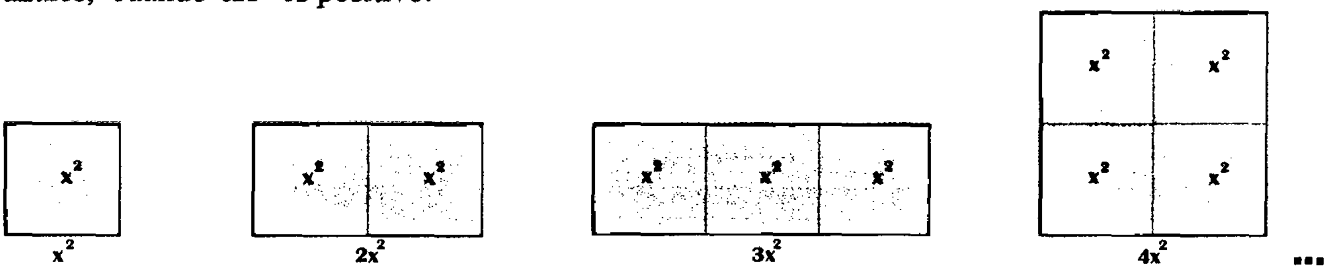
III. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS TÉRMINOS DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA CON ALGEPLANOS

Toda expresión de 2° grado en forma general completa ($ax^2 + bx + c$) o incompleta ($ax^2 + bx$ **o** $ax^2 + c$) puede ser representada geométricamente por un conjunto de piezas del algeplano.

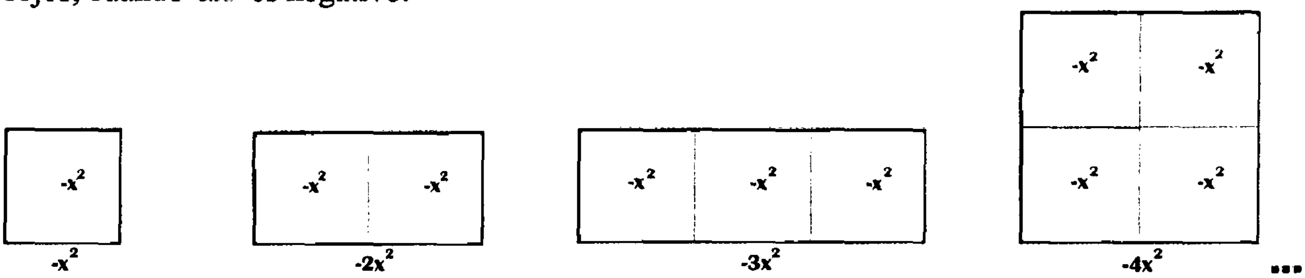
Esta representación geométrica se realiza término a término.

En resumen:

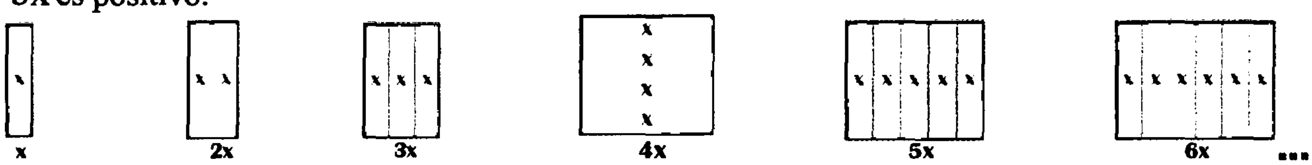
1. ***El término cuadrático positivo.-*** Se representa mediante uno o conjunto de cuadrados grandes azules, cuando ax^2 es positivo.



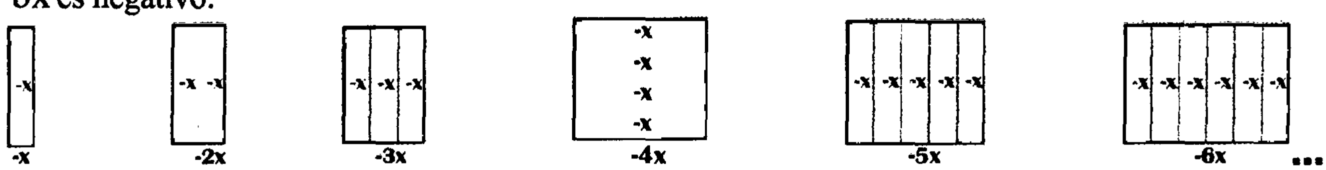
2. ***El término cuadrático negativo.-*** Se representa mediante uno o conjunto de cuadrados grandes rojos, cuando ax^2 es negativo.



3. ***El término lineal positivo.-*** Se representa mediante uno o conjunto de rectángulos verdes, cuando bx es positivo.



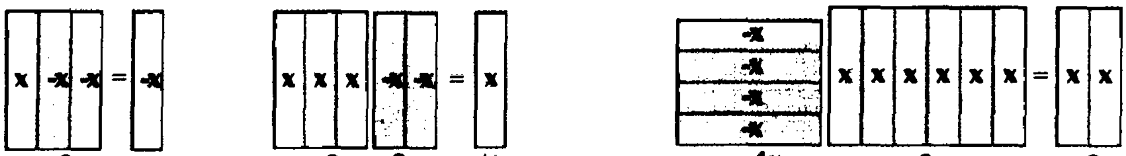
4. ***El término lineal negativo.-*** Se representa mediante uno o conjunto de rectángulos rojos, cuando bx es negativo.



Nota:

La combinación de dos grupos o conjunto de rectángulos x y $-x$ como se indica en las figuras, siempre que la suma algebraica de los dos grupos coincida con el término bx que queremos representar. Aquí se aplica el principio de 0: ***"pares de valores opuestos se anulan"***

Ejemplos

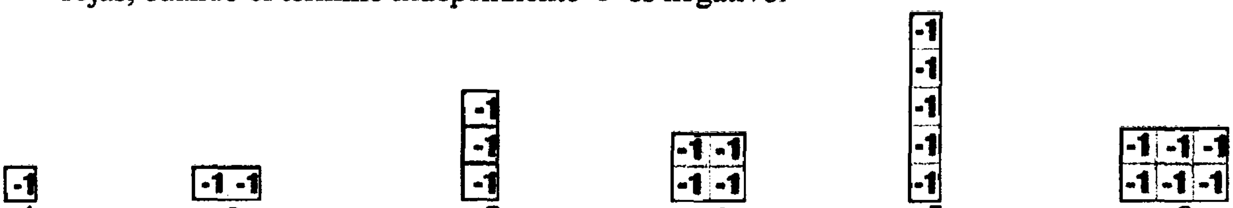


+x -2x = -x   +3x -2x = +x   -4x +6x = +2x

5. ***El término independiente positivo***.- Se representa mediante una unidad o conjunto de unidades amarillos, cuando el término independiente C es positivo.

1   2   3   4   5   6 ...

6. ***El término independiente negativo***.- Se representa mediante una unidad o conjunto de unidades rojas, cuando el término independiente C es negativo.

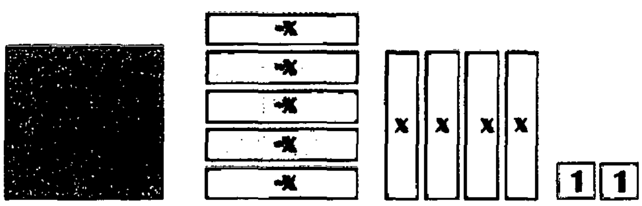


-1   -2   -3   -4   -5   -6 ...

IV. AGRUPACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS CON ALGEPLANOS.

Cualquier conjunto que incluya al menos una pieza (x^2), representa una expresión de 2° grado.

Ejemplo N° 01: Dada las siguientes piezas del algeplano, representar y simplificar en una expresión algebraica.



Resolución

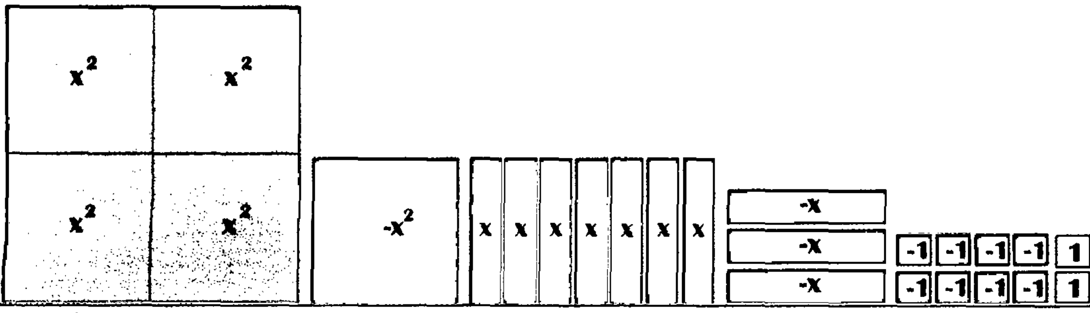
- Escribiendo la suma de todos los valores de las piezas, tenemos la siguiente expresión:

$$x^2 - x - x - x - x - x + x + x + x + x + 1 + 1$$

- Agrupando términos y simplificando, obtenemos la expresión de 2° grado:

$$x^2 - x + 2$$

Ejemplo Nº 02: Dada las siguientes piezas del algeplano, representar y simplificar en una expresión algebraica.



Resolución

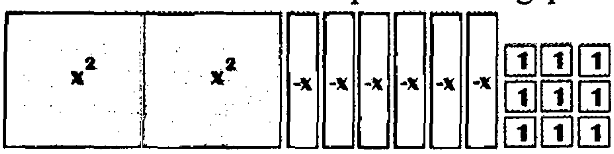
- Escribiendo la suma de todos los valores de las piezas, tenemos la siguiente expresión:
  $x^2+x^2+x^2+x^2-x^2+x+x+x+x+x+x+x-x-x-x-1-1-1-1-1-1-1-1+1+1$
- Agrupando términos y simplificando, obtenemos la expresión de 2° grado:

  $3x^2+4x-6$

Ejemplo Nº 03: Representar geométricamente cada una de las siguientes expresiones algebraicas para: $2x^2-6x+9$

Resolución

Seleccionando las piezas del algeplano obtenemos.



V. ECUACIONES CUADRÁTICAS O DE SEGUNDO GRADO

Definición.- Son aquellas ecuaciones que presentan la siguiente forma general.

$$\boxed{ax^2+bx+c=0}$$

Donde **a, b y c** son llamados coeficientes y X es la variable de la ecuación.

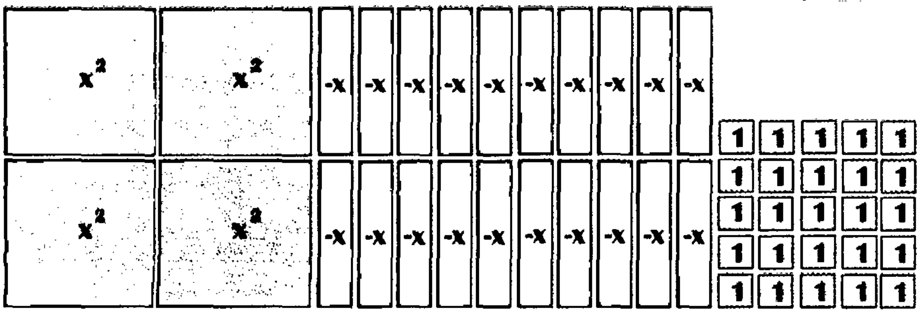
- El coeficiente "a" se llama coeficiente **cuadrático** o de **segundo grado (CC).**
- El coeficiente "b" se llama coeficiente **lineal** o de **primer grado (CL).**
- El coeficiente "c" se llama término **independiente (TI).**

Términos de una ecuación cuadrática.

$$ax^2+bx+c=0$$

Término independiente (TI)
Término lineal (TL)
Término cuadrático (TC)

Representación geométrica de una ecuación cuadrática | Representación simbólica

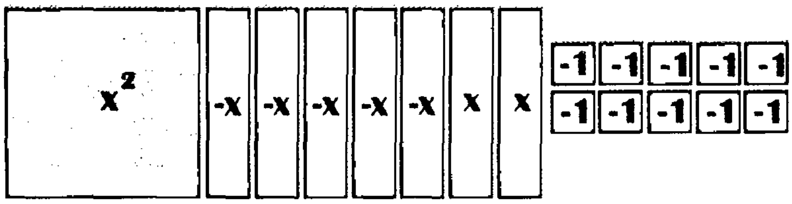


$$= \boxed{4x^2 + (-20x) + 25 = 0}$$

Donde:

- ➢ Los coeficientes son: a = 4 b = -20 c = 25
- ➢ Los términos son: TC = $4x^2$, TL = $-20x$, TI = $+25$

Ejemplo N° 01. Dada la siguiente representación geométrica, encontrar la representación simbólica e indicar sus coeficientes y términos.



Resolución

a) Escribiendo la suma de todos los valores de las piezas, tenemos la siguiente expresión:

$$x^2 - x - x - x - x - x + x + x - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1$$

b) Agrupando términos y simplificando, obtenemos la expresión de 2° grado:

$$1x^2 + (-3x) + (-10) = x^2 - 3x - 10$$

Donde:

- ➢ Los coeficientes son: a = 1, b = -3 y c = -10
- ➢ Los términos son: TC = x^2, TL = $-3x$, TI = -10

Ejemplo N° 02: Dada la siguiente expresión algebraica $2x^2 - 8x + 9 = -2x$. Simplifica e identifica sus coeficientes y términos.

Resolución

a) Agrupando los términos semejantes.

$$2x^2 - 8x + 2x + 9 = 0$$

b) Simplificando los términos obtenemos: $2x^2 - 6x + 9 = 0$

Donde:

- ➢ Los coeficientes son: a = 2, b = -6 y c = 9.
- ➢ Los términos son: TC = $2x^2$, TL = $-6x$, TI = $+9$

VI. REPRESENTACIÓN DE TIPOS O FORMAS DE ECUACIONES CUADRÁTICAS CON LOS ALGEPLANOS

TIPOS O FORMAS DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

Tenemos

- Ecuación en forma de BINOMIO AL CUADRADO
  - Con término independiente. Ejemplo: $(x+3)^2 - 2 = 0$
  - Sin término independiente. Ejemplo: $(x-4)^2 = 0$
- Ecuación en forma de producto de dos factores o FACTORIZADAS
  Ejemplo: $(x+2)(x-3) = 0$
- Ecuación en forma GENERAL
  - Incompleta
    - Sin término independiente Ejemplo: $x^2 + 5x = 0$
    - Con término independiente. Ejemplo: $x^2 - 6 = 0$
  - Completa Ejemplo: $x^2 + 1x - 6 = 0$

a) Ecuación en forma general.- Este tipo de ecuación se clasifica en dos: incompletas y completas.

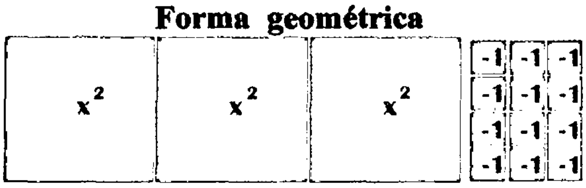
➢ **Ecuaciones incompletas.-** Se dice que una ecuación es incompleta, si los coeficientes b y c o ambos, son ceros.

Si b = 0 entonces	: $ax^2 + c = 0$
Si c = 0 entonces	: $ax^2 + bx = 0$

Ecuaciones cuadráticas incompletas.

Representación de las ecuaciones de tipo $\boxed{ax^2 + c = 0}$, con los algeplanos.

Forma geométrica



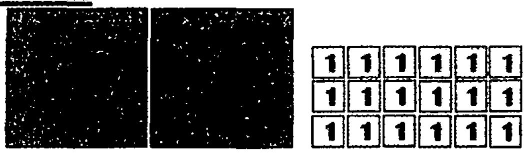
=

Forma simbólica

$\boxed{3x^2 - 12 = 0}$

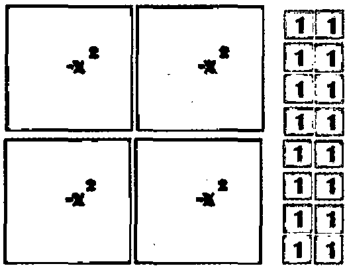
Ejemplo N° 01: Representar la siguiente ecuación cuadrática $2x^2 + 18 = 0$, con los algeplanos.

Resolución.



= 0

Ejemplo N° 02: Dada la siguiente representación geométrica, representar en forma simbólica.



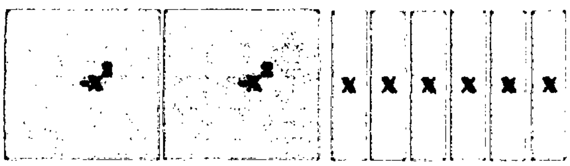
= 0

Resolución.

$$\boxed{-4x^2 + 16 = 0}$$

Representación de las ecuaciones de tipo $\boxed{ax^2 + bx = 0}$, con los algeplanos.

Forma geométrica | **Forma simbólica**



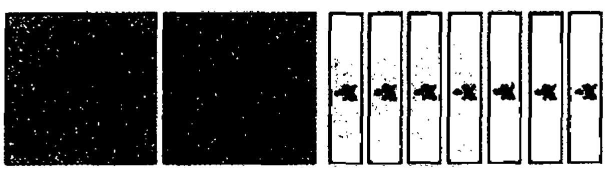
= $\boxed{-2x^2 + 6x = 0}$

Ejemplo N° 01: Representar la siguiente ecuación cuadrática $3x^2 + 9x = 0$, con los algeplanos.

Resolución

= 0

Ejemplo N° 02: Dada la siguiente representación geométrica, representar en forma simbólica.



= 0

Resolución

$$\boxed{2x^2 - 7x = 0}$$

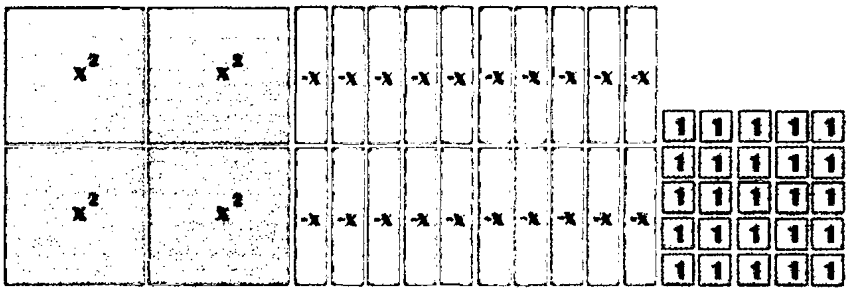
- **Ecuaciones Completas.-** Se dice que una ecuación es completa, si los coeficientes a, b y c son diferentes de cero.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Ecuaciones Cuadráticas Completas. $(a, b, c \neq 0)$

Representación de las ecuaciones de tipo: $ax^2 + bx + c = 0$, **con los algeplanos.**

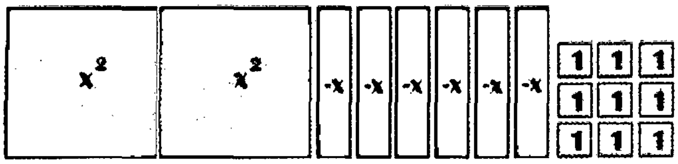
Forma geométrica | **Forma simbólica**



$=$ $4x^2 - 20x + 25 = 0$

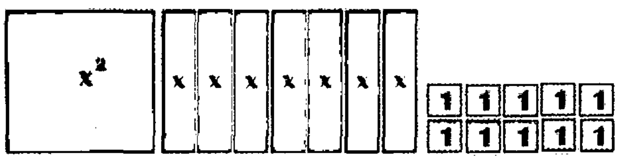
Ejemplo N° 01: Representar la siguiente ecuación cuadrática $2x^2 - 6x + 9 = 0$**, con los algeplanos.**

Resolución



$= \quad 0$

Ejemplo N° 02: Dada la siguiente representación geométrica, representar en forma simbólica.



$= \quad 0$

Resolución

$$x^2 + 7x + 10 = 0$$

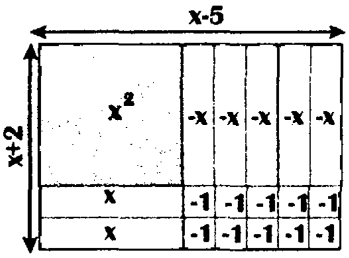
b) **Ecuación en forma de producto de dos factores o factorizadas.-** Este tipo de ecuación es de la siguiente forma.

$$(x \pm a)(x \pm b) = 0$$

Producto de dos factores
$a.b.c \neq 0$

Representación geométrica con los algeplanos, las ecuaciones en forma de producto de dos factores o factorizadas: $(x \pm a)(x \pm b) = 0$

Forma geométrica | **Forma simbólica**

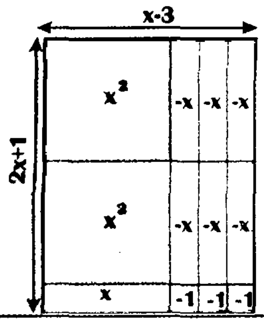


$=$

$$(x+2)(x-5)=0$$

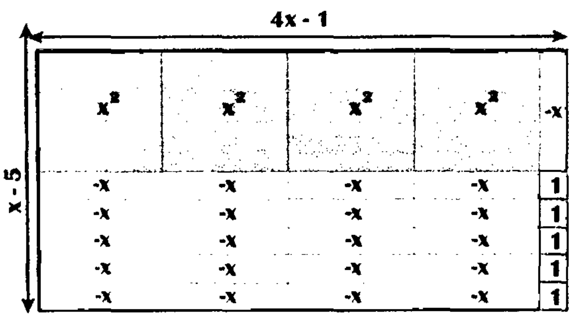
Ejemplo N° 01: Representar la siguiente ecuación cuadrática $(2x+1)(x-3)=0$**, con los algeplanos.**

Resolución



$= \quad 0$

Ejemplo N° 02: Dada la siguiente representación geométrica, representar en forma simbólica.



$= \quad 0$

Resolución

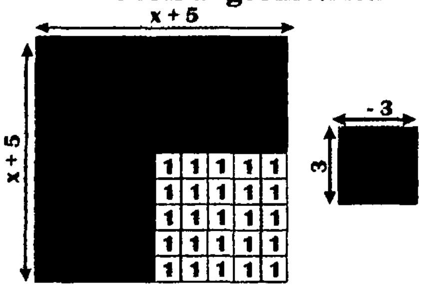
$$(4x-1)(x-5)=0$$

c) **Ecuaciones en forma de binomio al cuadrado.-** Este tipo de ecuación se clasifica en dos: Con términos independiente y sin término independiente.

- **Con término independiente.-** Es donde aparece un binomio al cuadrado y un término independiente y es de la siguiente forma: $\boxed{(x+a)^2+c=0}$ Donde $a,c \neq 0$

Representación de las ecuaciones de tipo: $(x+a)^2+c=0$ con los algeplanos

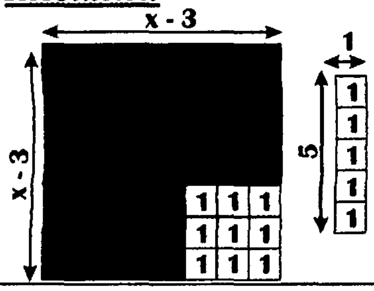
Forma geométrica | **Forma simbólica**



= $\boxed{(x+5)^2-9=0}$

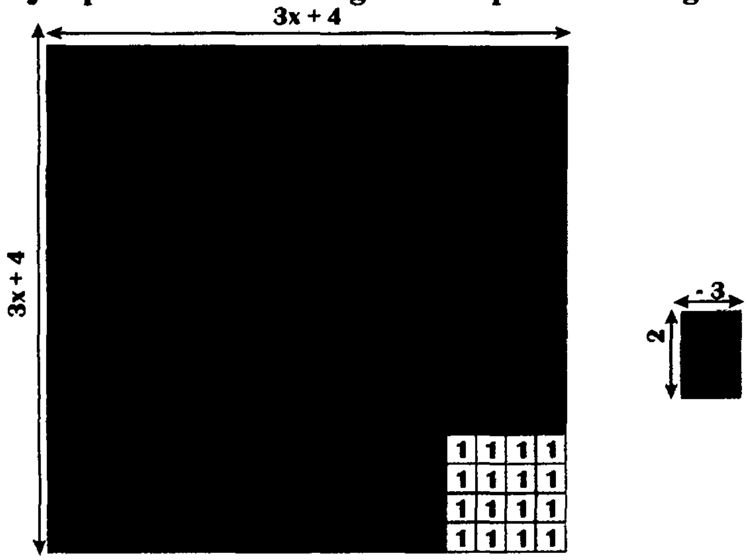
Ejemplos N° 01: Representar la siguiente ecuación cuadrática $(x-3)^2+5=0$, con los algeplanos.

Resolución



= 0

Ejemplos N° 02: De la siguiente representación geométrica, representar en forma simbólica.



= 0

Resolución

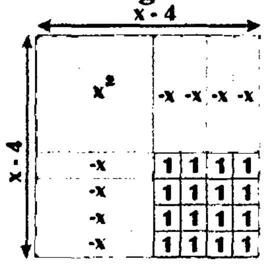
$\boxed{(3x+4)^2-6=0}$

- **Sin Término Independiente.-** Es de la siguiente forma.

$(x \pm a)^2 = 0$ Donde $a \neq 0$

Representación de las ecuaciones de tipo: $(x \pm a)^2 = 0$, con los algeplanos.

Forma geométrica | **Forma simbólica**

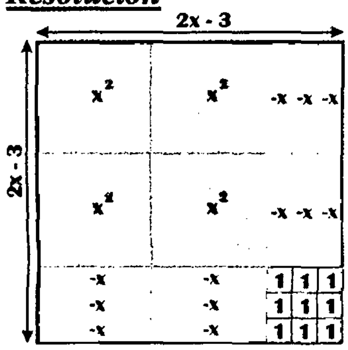


$=$

$(x-4)^2 = 0$

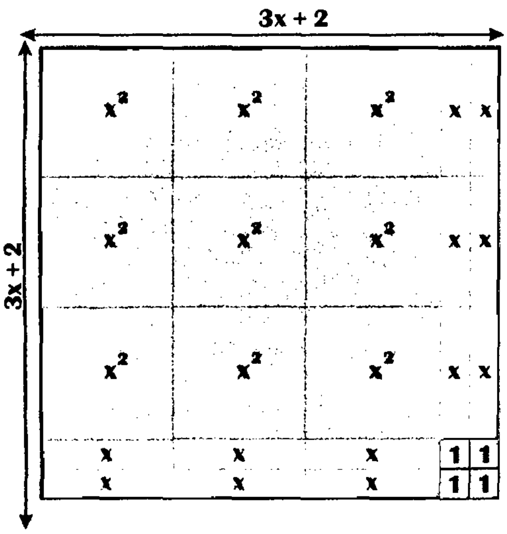
Ejemplos N° 01: Representar la siguiente ecuación cuadrática $(2x-3)^2 = 0$, con los algeplanos.

Resolución



$= \quad 0$

Ejemplos N° 02: De la siguiente representación geométrica, representar en forma simbólica.



$= \quad 0$

Resolución

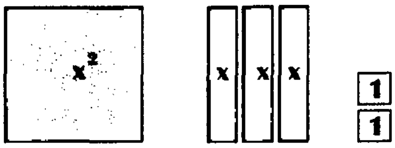
$(3x+2)^2 = 0$

VII. CONSTRUCCIÓN DE RECTÁNGULOS Y CUADRADOS CON LOS ALGEPLANOS PARA OBTENER ECUACIONES CUADRÁTICAS EQUIVALENTES MÁS SIMPLES.

A partir de las piezas de los algeplanos, que representa una ecuación cuadrática, podemos construir rectángulos y/o cuadrados. El cálculo del área de estas figuras nos permitirá obtener expresiones más sencillas (en forma factorizada o en forma de binomio al cuadrado) equivalentes a la expresión general de 2° grado, representada inicial.

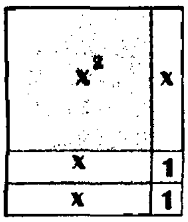
Pasos para obtener una ecuación cuadrática equivalente a x^2+3x+2 en forma factorizada, *a* partir de una construcción de cuadrados y rectángulos, con las piezas del algeplano.

Primero.- Seleccionamos las piezas que representan la expresión x^2+3x+2.



(figura N° 01)

Segundo.- Construimos un rectángulo o cuadrado.



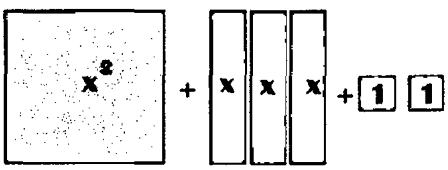
(figura N° 02)

Tercero.- Calculamos el área de las **figuras N° 01** y **N° 02** mediante dos formas diferentes:

a) Calculo de área a partir de sus componentes.

Área de un cuadrado o rectángulo es igual a la suma de las áreas de los pedazos que lo forman.

Entonces: **Área $_{\text{Rectángulo}}$ = Suma de las áreas de los pedazos que lo conforman.**



Área $_{\text{Rectángulo}}$ $= x^2+x+x+x+1+1$

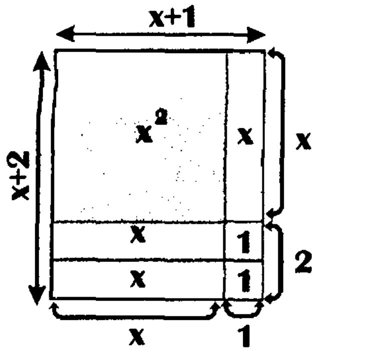
Agrupando términos tenemos:

Área $_{\text{Rectángulo}}$ $= x^2+3x+2$

b) Calculo de área a partir de sus dimensiones.

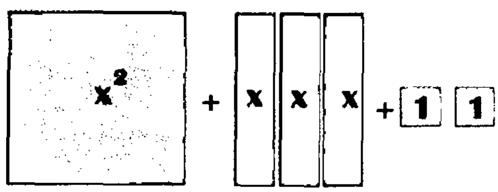
Área del rectángulo es el producto de las dimensiones de su base por su altura.

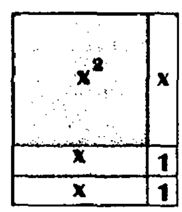
Entonces: $\boxed{\text{Área}_{\text{Rectángulo}} = \text{base x altura}}$



Área $_{\text{Rectángulo}} = (x+2)(x+1)$

Por lo tanto observando las dos formas **a) y b),** comprobamos que las áreas de las dos figuras, son iguales y también hemos logrado una expresión equivalente más sencilla, en forma factorizada, mediante la construcción de cuadrados y/o rectángulos:

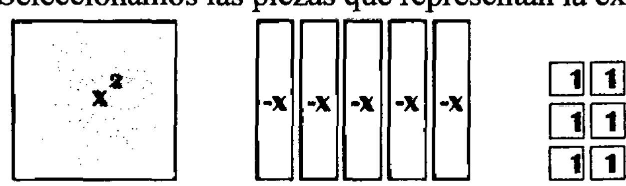




$$\therefore \quad x^2+3x+2 \quad = \quad (x+2)(x+1)$$

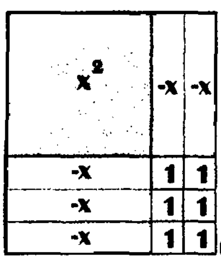
Ejemplo N° 01: Obtener una ecuación cuadrática equivalente a x^2-5x+6 **en forma factorizada, a partir de una construcción de cuadrados y/o rectángulos, con los algeplanos.**

Primero.- Seleccionamos las piezas que representan la expresión x^2-5x+6 .



(Figura N° 01)

Segundo.- Construimos un rectángulo o cuadrado.

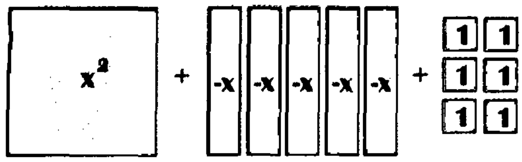


(Figura N° 02)

Tercero.- Calculamos el área de las figuras N° 01 y N° 02 mediante dos formas diferentes:

a) **Calculo de área a partir de sus componentes.**

Área $_{\text{Rectángulo}}$ = Suma de las áreas de los pedazos que lo conforman.



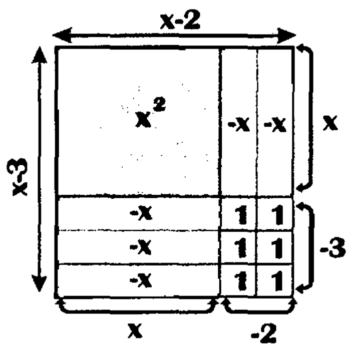
Área $_{\text{Rectángulo}}$ = $x^2 - x - x - x - x - x + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Agrupando términos tenemos:

Área $_{\text{Rectángulo}}$ = $x^2 - 5x + 6$

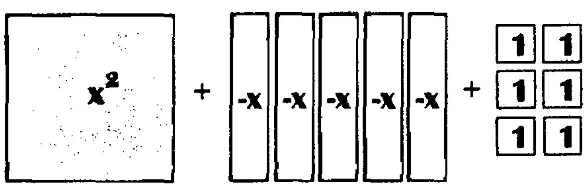
b) **Calculo de área a partir de sus dimensiones.**

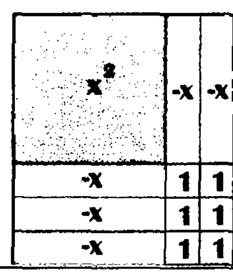
Área $_{\text{Rectángulo}}$ = base x altura



Área $_{\text{Rectángulo}}$ = $(x-2)(x-3)$

Por lo tanto observando las dos formas a) y b), comprobamos que las áreas son iguales y también hemos logrado una expresión equivalente más sencilla, en forma factorizada, mediante la construcción de un rectángulo:





$\therefore \quad x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$

a) Construcción de rectángulos y cuadrados con los algeplanos: características y condiciones.

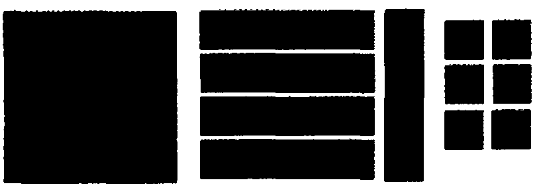
La construcción de rectángulos y cuadrados sirve para obtener expresiones equivalentes más sencillas de ecuaciones cuadráticas en forma general.

Estas construcciones no son únicas, un mismo conjunto de piezas puede combinarse de diferentes *formas*, dando lugar a rectángulos y/o cuadrados distintos.

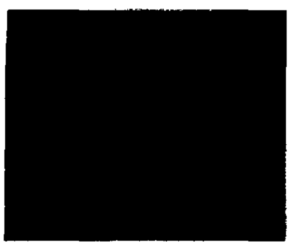
Pero no todos los rectángulos o cuadrados que pueden construirse son válidos, sólo algunos de ellos nos permiten obtener expresiones equivalentes más sencillas.

En consecuencia, será necesario establecer condiciones y reglas que nos faciliten la construcción de rectángulos y cuadrados válidos.

Ejemplo: Construye un rectángulo a partir de las siguientes piezas del algeplano que representa la ecuación cuadrática: $x^2 - x - 6 = 0$



Un posible rectángulo que se podría construir con esta colección de piezas, sería.



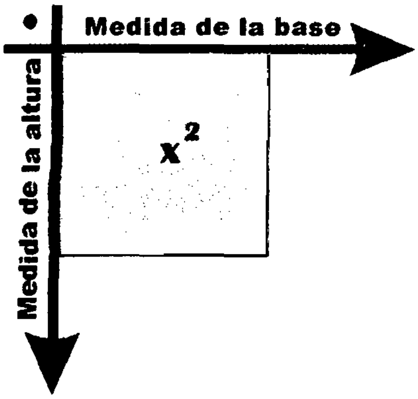
En este rectángulo es imposible determinar las dimensiones **(medidas de la base y de la altura).**

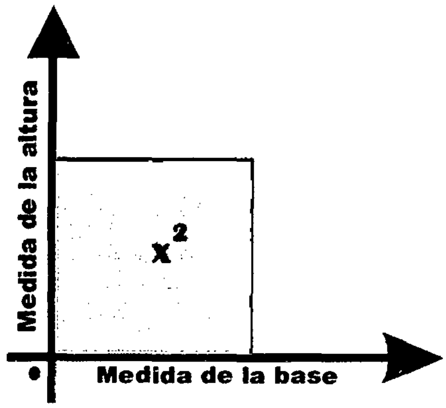
Debido a la combinación de piezas realizada, las medidas de los lados paralelos son distintas cuando deberían ser iguales.
Por tanto, no es posible calcular el área a partir de sus dimensiones y en consecuencia: no es posible obtener una expresión equivalente.

b) Reglas para la construcción de rectángulos y cuadrados con los algeplanos

En la construcción de rectángulos o cuadrados debemos tener mucho cuidado, para evitar errores en la determinación de las dimensiones, para ello tenemos realizado las siguientes reglas.

Primera regla. El término cuadrático (x^2) o (**cuadrados grandes de color azul o rojo**), tienen que estar ubicados en una de las esquinas ya sea en la parte superior o inferior, como se muestra en las siguientes figuras.



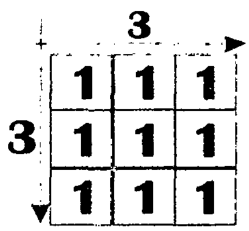


Segunda regla.- Los términos independientes (C) o (cuadrados pequeños de color amarillo o rojo), tienen que estar agrupados en un único bloque, formando un rectángulo o cuadrado.

: Para armar las dimensiones de los bloques de las unidades tenemos que extraer sus factores al término independiente.

Ejemplo Nº 01.

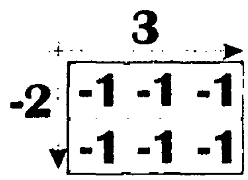
$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \rightarrow 9 = 3 \times 3$$



Bloque de unidades positivas

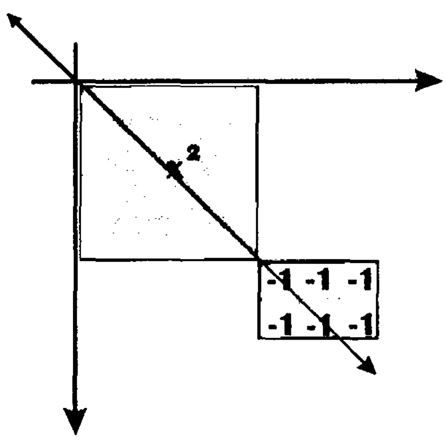
Ejemplo Nº 02.

$$\begin{array}{r|l} -6 & -2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \rightarrow -6 = (-2) \times 3$$

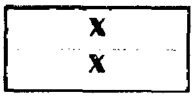


Bloque de unidades negativas

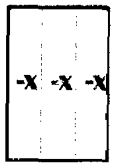
Tercera regla.- La pieza x^2 y los bloques de las unidades, tienen que estar situadas en diagonal, como muestra la figura.



Cuarta regla.- Los términos lineales (bx) o (rectángulos de color verde y rojo), no pueden estar mezclados en un solo bloque. Cada color tiene que formar su propio bloque en forma vertical u horizontal.

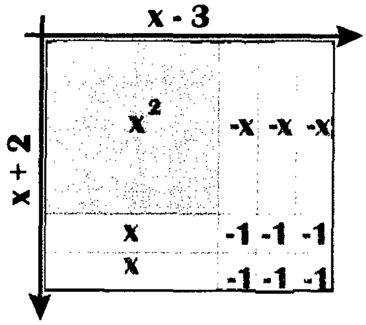


Forma horizontales

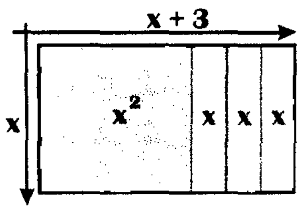


Forma verticales

Quinta regla.- Completamos la construcción del rectángulo y/o cuadrado, uniendo las reglas 3 y 4.



Ejemplo N° 01: Escribe la dimensión del siguiente rectángulo.

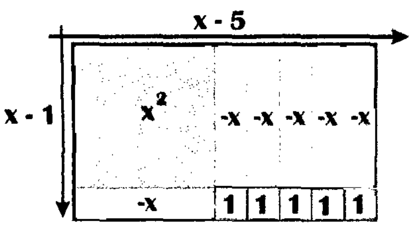


***La dimensión de la figura es*:** $(x)(x+3)$

Ejemplo N° 02: Factorizar la siguiente expresión x^2-6x+5. A partir de la construcción de un rectángulo con los algeplanos.

Resolución

Primero.- Construimos un rectángulo utilizando las piezas del algeplano.



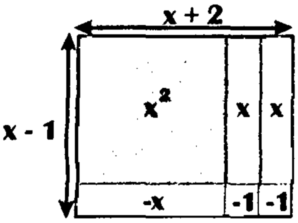
Segundo.- Escribimos la expresión factorizada equivalente a x^2-6x+5 obtenida a partir de la construcción.

$$\Rightarrow x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$$

VIII. SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA CON EL APOYO DE LOS ALGEPLANOS

Las soluciones o raíces de una ecuación cuadrática son los valores de X que al sustituirlos en la ecuación, hacen que la igualdad se cumpla.

Ejemplo Nº 01: Dada la siguiente representación geométrica con dimensiones $(x-1)(x+2)=0$



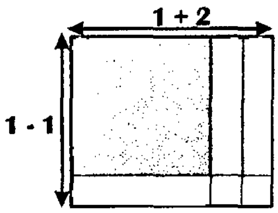
$= \quad 0$

Comprueba si las soluciones son: X = 1 y X = -2.

<u>Resolución</u>

a) Sustituimos los valores -1 y -2 en el rectángulo, para comprobar si son o no soluciones

Para $x=1$



$= \quad 0$

Recordando de la clase anterior.

Área $_{\text{Rectángulo}}$ = Base x Altura

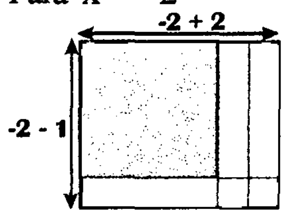
$\rightarrow (1-1)(1+2)=0$

$(0)(3)=0$

$0=0$

La igualdad se cumple para X = 1

Para $x=-2$



$= \quad 0$

Recordando de la clase anterior.

Área $_{\text{Rectángulo}}$ = Base x Altura

$\rightarrow (-2-1)(-2+2)=0$

$(-3)(0)=0$

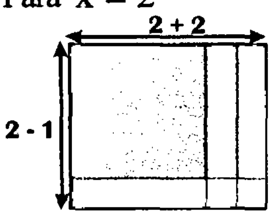
$0=0$

La igualdad se cumple para X = -2

Por tanto, los valores **X = 1 y X = -2 son soluciones de la ecuación:** $(x-1)(x+2)=0$

b) Comprueba para otros valores de X, por ejemplo X = 2 y X = 3, no son soluciones de la ecuación $(x-1)(x+2)=0$.

Para $x=2$



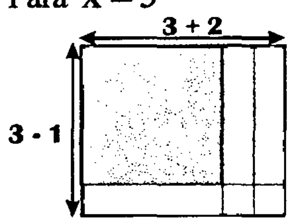
$\rightarrow (2-1)(2+2)=0$

$(1)(4)=0$

$4 \neq 0$

La igualdad no se cumple para X = 2

Para $x=3$



$\rightarrow (3-1)(3+2)=0$

$(2)(5)=0$

$10 \neq 0$

La igualdad se cumple para X = 3

Por tanto, los valores **X = 2 y X = 3. No son soluciones de la ecuación:** $(x-1)(x+2)=0$

IX. SOLUCIÓN O RAÍCES DE ECUACIONES INCOMPLETAS

Para hallar las raíces de una ecuación cuadrática distinguiremos los siguientes casos.

Caso 1: si **b = 0,** la ecuación es de la forma: $\boxed{ax^2 + c = 0}$

Los procedimientos para resolver son los siguientes:

a) Se traslada al término independiente a segundo miembro con signo cambiado $\boxed{ax^2 = -c}$.

b) trasladamos el coeficiente del término cuadrático al otro miembro como divisor del término independiente. $\boxed{x^2 = \frac{-c}{a}}$

Aplicamos y extraemos las raíces a los dos miembros; anteponiendo el signo de la raíz la término independiente.

Nota: Estos son los procedimientos para resolver algebraicamente.

Ejemplo N° 01: Resolver la ecuación: $3x^2 - 12 = 0$

Resolución

Primero.- Trasladamos el término independiente al segundo miembro.

$3x^2 = 12$

Segundo.- Resolviendo algebraicamente tenemos.

$$3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow x^2 = 4$$

Tercero. Se extraen las raíces de los dos miembros.

$$\sqrt{(x)^2} = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = \pm 2$$

a) $x = +2$

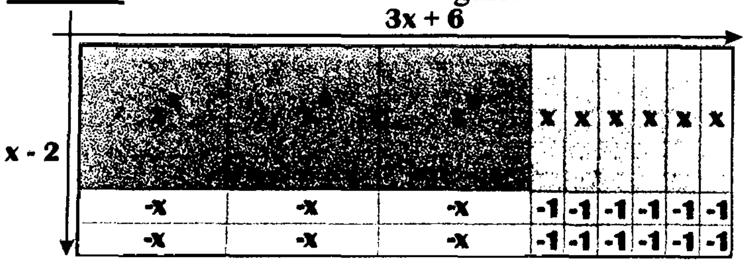
b) $x = -2$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: $3x^2 - 12 = 0$; es: = $\{-2; +2\}$

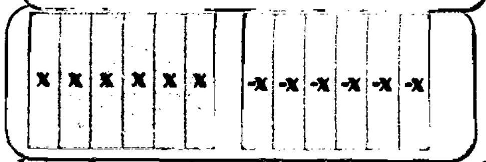
Ejemplo Nº 02: Resolver la ecuación: $3x^2 - 12 = 0$**, utilizando los algeplanos.**

***Resolución*:**

Primero.- Construimos un rectángulo.



Aprovechando la nota de la página 10 y 11 donde dice "pares de valores opuestos se anulan", por el principio de cero, aumentamos los rectángulos de color rojo y verde para completar el rectángulo grande.



Ojo*: *hemos aumentado 6 rectángulos rojos y verdes, para completar la construcción del rectángulo.

Mediante el cual, obtenemos la ecuación cuadrática equivalente a $3x^2 - 12 = 0$ en forma factorizada. $(x-2)(3x+6)=0$

Segundo.- Resolviendo algebraicamente estas ecuaciones, obtenemos las soluciones:

$(x-2)(3x+6)=0 \Rightarrow$

Si, $x-2=0 \Rightarrow x=2$

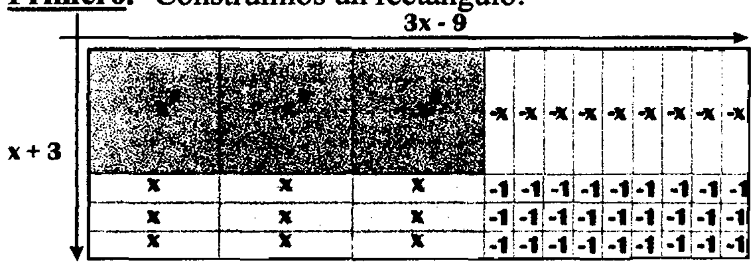
Si, $3x+6=0 \Rightarrow x=-\dfrac{6}{3}=-2$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: = {-2, 2}**

Ejemplo Nº 03: Resolver la ecuación: $3x^2 - 27 = 0$**, con los algeplanos**

***Resolución*:**

Primero.- Construimos un rectángulo:



Ojo*: *hemos aumentado 9 rectángulos rojos y verdes, para completar la construcción del rectángulo.

- Mediante el cual, obtenemos la ecuación cuadrática equivalente a $3x^2 - 27 = 0$ en forma factorizada. $(x+3)(3x-9)=0$

Segundo.- Resolviendo algebraicamente estas ecuaciones, obtenemos las soluciones:

$(x+3)(3x-9)=0 \Rightarrow$

Si, $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

Si, $3x-9=0 \Rightarrow x=\dfrac{9}{3}=+3$

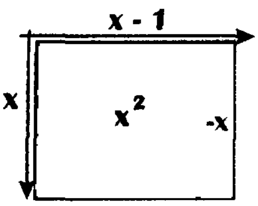
$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: =** $\{-3,+3\}$

Caso 2: Si $c = 0$, la ecuación es de la forma $ax^2 + bx = 0$, las raíces se obtiene extrayendo a "x" como factor común:

Ejemplo N° 01: Resolver la ecuación: $x^2 - x = 0$

Resolución:

Primero.- Construimos un rectángulo:



***Ojo**: No utilizaremos los bloques de las unidades, para construir el rectángulo.*

- Por lo tanto, obtenemos la ecuación cuadrática equivalente a $x^2 - x = 0$ en forma factorizada. $x(x-1)=0$

Segundo.- Resolviendo algebraicamente esta ecuación, obtenemos las siguientes soluciones:

$x(x-1)=0 \Rightarrow$

Si, $x = 0$

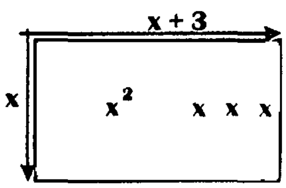
Si, $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: =** $\{0,1\}$

Ejemplo N° 02: Resolver la ecuación: $x^2 + 3x = 0$

Resolución:

Primero.- Construimos un rectángulo:



- Mediante el cual, obtenemos la ecuación cuadrática equivalente a $x^2 + 3x = 0$ en forma factorizada. $x(x+3)=0$

Segundo.- Resolviendo algebraicamente esta ecuación, obtenemos las siguientes soluciones:

$x(x+3)=0 \Rightarrow$

Si, $x=0$

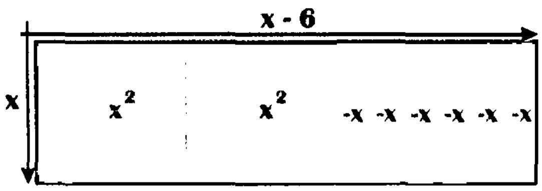
Si, $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: =** $\{0,-3\}$

Ejemplo Nº 03: Resolver la ecuación: $2x^2-6x=0$

Resolución:

Primero.- Construimos un rectángulo:



- Mediante el cual, obtenemos la ecuación cuadrática equivalente a $2x^2-6x=0$ en forma factorizada. $x(x-6)=0$

Segundo.- Resolviendo algebraicamente esta ecuación, obtenemos las siguientes soluciones:

$x(x-6)=0 \Rightarrow$

Si, $x=0$

Si, $x-6=0 \Rightarrow x=6$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: =** $\{0,6\}$

X. APLICACIONES DE LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA EN LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS

Propiedades de las raíces.

Recordando sobre los coeficientes de una ecuación cuadrática.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Formula general $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

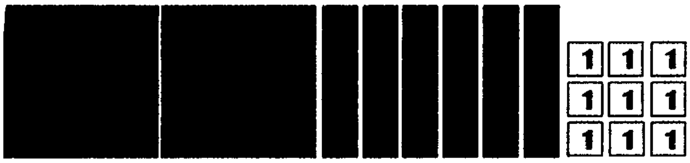
- El coeficiente "a" se llama coeficiente **cuadrática** o de **segundo grado**.
- El coeficiente "b" se llama coeficiente **lineal** o de **primer grado**.
- El coeficiente "c" se llama término **independiente**.

☺ **Suma de raíces**

La suma de las raíces de la ecuación cuadrática es igual al coeficiente del término lineal, dividido por el coeficiente del término cuadrático, éste resulta de la simplificación de X_1 y X_2 de la formula general.

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Ejemplos N° 01. Dada la siguiente representación geométrica de una ecuación cuadrática con los algeplanos, calcular la suma de sus raíces.



= 0

Resolución

Primero.- Representamos en forma simbólica dicha representación, y esto es.

$$2x^2 - 6x + 9 = 0$$

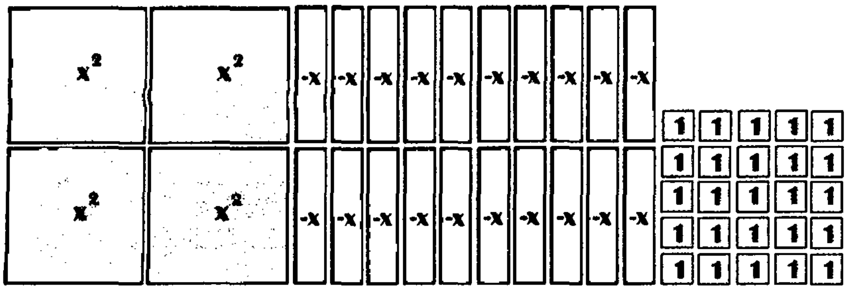
Segundo.- Identificaremos los coeficientes del término cuadrático y lineal.

$\Rightarrow$ a = 2 y b = -6

Tercero.- Remplacemos los coeficientes determinados en la formula $\boxed{x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}}$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = \dfrac{-(-6)}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$, **Por lo tanto la suma de las raíces es: 3**

Ejemplos N° 02. Dada la siguiente representación geométrica de una ecuación cuadrática con los algeplanos, calcular la suma de sus raíces.



Resolución

Primero.- Representamos en forma simbólica dicha representación, y esto es.

$$4x^2 - 20x + 25 = 0$$

Segundo.- Identificaremos los coeficientes del término cuadrático y lineal.

$\Rightarrow$ a = 4 y b = -20

Tercero.- Remplacemos los coeficientes determinados en la formula $\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-(-20)}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

Por lo tanto la suma de las raíces es: 5

Ejemplos N° 03. Dada la ecuación: $x^2 - 11x - 26 = 0$, calcular la suma de sus raíces.

Resolución

Primero.- Identificaremos los coeficientes del término cuadrático y lineal.

$\Rightarrow$ a = 1 y b = -26

Segundo.- Remplacemos los coeficientes determinados en la formula $\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-(-26)}{1} = 26$$

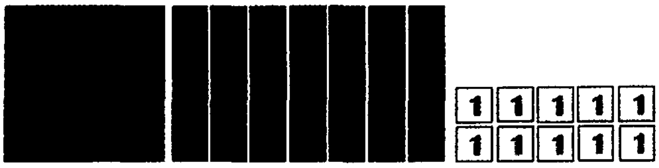
Por lo tanto la suma de las raíces es: 26

☺ **Producto de raíces**

El producto de las raíces de la ecuación cuadrática es igual al coeficiente del término independiente, dividido por el coeficiente del término cuadrático, éste resulta de la simplificación de $X_1 x X_2$ de la formula general.

$$\therefore x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

Ejemplos Nº 01. Dada la siguiente representación geométrica de una ecuación cuadrática con los algeplanos, calcular el producto de sus raíces.



Resolución

Primero.- Representamos en forma simbólica, dicha representación es.

$$x^2 + 7x + 10 = 0$$

Segundo.- Identifiquemos los coeficientes del término cuadrático e independiente.

$\Rightarrow a = 1$ y $c = 10$

Tercero.- Remplacemos los coeficientes determinados en la formula $\boxed{x_1.x_2 = \frac{c}{a}}$

$\Rightarrow x_1.x_2 = \frac{10}{1} = 10$. **Por lo tanto el producto de las raíces es: 10**

Ejemplos Nº 02. Dada la siguiente representación geométrica de una ecuación cuadrática con los algeplanos, calcular el producto de sus raíces.

Resolución

Primero.- Representamos en forma simbólica, dicha representación es.

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

Segundo.- Identifiquemos los coeficientes del término cuadrático e independiente.

$\Rightarrow a = 2$ y $c = 1$

Tercero.- Remplacemos los coeficientes determinados en la formula $\boxed{x_1.x_2 = \frac{c}{a}}$

$\Rightarrow x_1.x_2 = \frac{1}{2}$. **Por lo tanto el producto de las raíces es:** $\frac{1}{2}$

Ejemplos N° 03. Dada la ecuación : $5x^2 - 14x - 3 = 0$**, calcular el producto de raíces.**

Resolución

Primero.- Identifiquemos los coeficientes del término cuadrático e independiente.

$\Rightarrow$ a = 5 y c = -3

Segundo.- Remplacemos los coeficientes determinados en la formula $\boxed{x_1.x_2 = \frac{c}{a}}$

$\Rightarrow x_1.x_2 = \frac{-3}{5}$. **Por lo tanto el producto de las raíces es:** $\frac{-3}{5}$

☺ **Formar una ecuación de segundo grado o cuadrática.**

Para construir una ecuación cuadrática debemos conocer las dos raíces X_1 y X_2 de una ecuación de segundo grado, esta se construye empleando la suma y producto de dichas raíces.

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}\text{, siendo } S = x_1 + x_2,\ P = x_1.x_2$$

Ejemplo N° 01: Formar una ecuación cuadrática, cuyas raíces son: $X_1=3$ y $X_2=5$

Resolución

Primero. Sabemos que
- **Suma de raíces** $S = 3 + 5 = 8$
- **Producto de raíces** $P = 3x5 = 15$

Segundo.- Aplicamos la formula $\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$, y obtenemos:

$x^2 - (8)x + (12) = 0$ $\quad\therefore$ **La ecuación es:** $x^2 - 8x + 12 = 0$

Ejemplo N° 02: Formar una ecuación cuadrática, cuyas raíces son: X=1 y X= $\frac{1}{2}$ **.**

Resolución

Primero. Sabemos que
- **Suma de raíces** $S = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$
- **Producto de raíces** $P = 1x\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Segundo.- Aplicamos la formula $\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$, y obtenemos:

$$x^2 - (\frac{3}{2})x + (\frac{1}{2}) = 0 \ ,$$

Multiplicamos por 2 a la expresión algebraica, para quitar los denominadores de la ecuación.

$2[x^2 - (\frac{3}{2})x + (\frac{1}{2}) = 0] \ = \ 2\times x^2 - 2\times(\frac{3}{2})x + 2\times(\frac{1}{2}) = 2\times 0 \ \Rightarrow$ queda los siguiente:

$2x^2 - 3x + 1 = 0$ $\therefore$ **La ecuación es:** $2x^2 - 3x + 1 = 0$

XI. RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA CON LOS ALGEPLANOS.

Una ecuación de segundo grado se puede resolver:

- Por medio de factorización
- Completando cuadrado.
- Empleando la formula general

☺ **Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización.**

Una ecuación de segundo grado o cuadrática se resuelve en forma sencilla por medio de factorización, cuando la factorización del polinomio puede efectuarse.

Pasos para resolver.

Primero.- Se trasladan todo los términos a un solo miembro, dejando el otro miembro igual a cero.

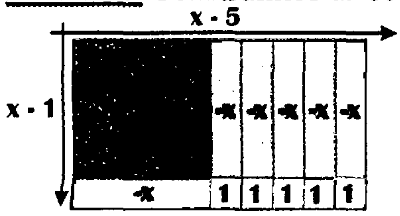
Segundo.- Construiremos rectángulos y/o cuadrados. El cálculo del área de estas figuras nos permitirá obtener expresiones más sencillas (en forma factorizada) equivalentes (idénticas) a la expresión general de 2° grado inicial representada.

Tercero.- Para obtener las soluciones se iguala cada factor a cero.

Ejemplo N° 01: Resolver la ecuación: $x^2 - 6x + 5 = 0$

Resolución:

Primero.- Construimos un rectángulo utilizando los algeplanos.



- Mediante el cual, obtenemos una ecuación cuadrática equivalente a $x^2 - 6x + 5 = 0$ en forma factorizada. $(x-1)(x-5) = 0$

Segundo.- Resolviendo algebraicamente estas ecuaciones, obtenemos las soluciones:

$(x-1)(x-5)=0 \Rightarrow$

Si, $x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=+1$

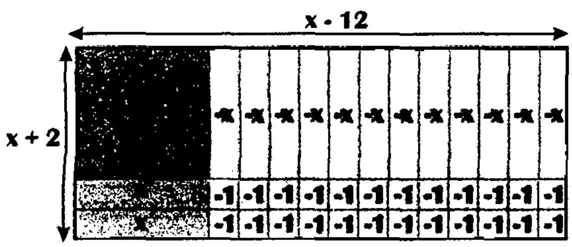
Si, $x-5=0 \quad \Rightarrow \quad x=+5$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: =** $\{+1,+5\}$

Ejemplo Nº 02: Resolver la ecuación: $x^2-10x-24=0$

Resolución:

Primero.- Construimos un rectángulo y/o cuadrado utilizando los algeplanos.



- Mediante el cual, obtenemos una ecuación cuadrática equivalente a $x^2-10x-24=0$ en forma factorizada. $(x+2)(x-12)=0$

Segundo.- Resolviendo algebraicamente estas ecuaciones, obtenemos las soluciones:

$(x+2)(x-12)=0 \Rightarrow$

Si, $x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$

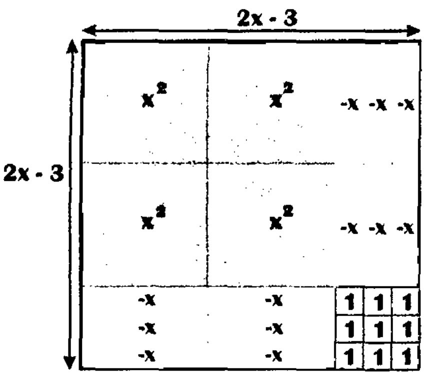
Si, $x-12=0 \quad \Rightarrow \quad x=+12$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: =** $\{-1,+12\}$

Ejemplo N° 03: Resolver la ecuación: $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Resolución:

Primero.- Construimos un rectángulo y/o cuadrado utilizando los algeplanos.



- Mediante el cual, obtenemos una ecuación cuadrática equivalente a $4x^2 - 12x + 9 = 0$ en forma factorizada. $(2x-3)(2x-3) = 0$

Segundo.- Resolviendo algebraicamente estas ecuaciones, obtenemos las soluciones:

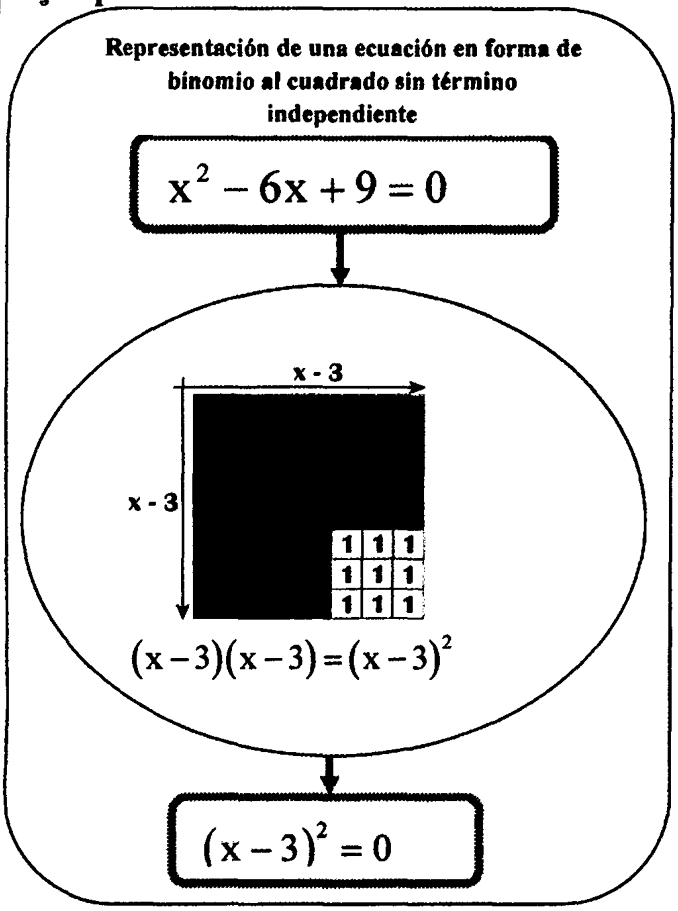
$$(2x-3)(2x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si, } 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = +\dfrac{3}{2} \\ \text{Si, } 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = +\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

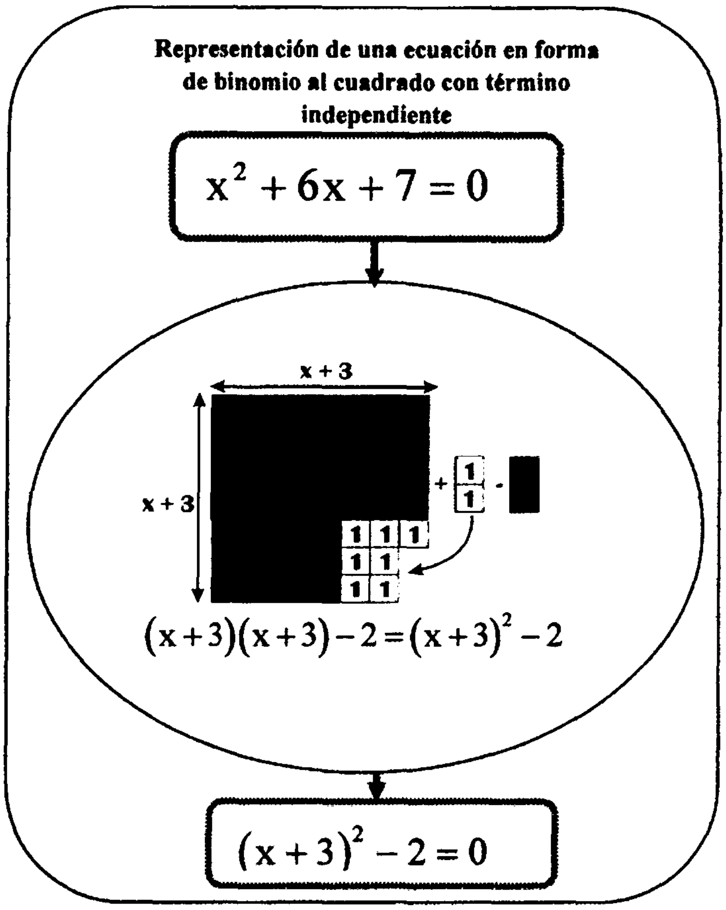
$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: =** $\left\{+\dfrac{3}{2}\right\}$

☺ Resolución de ecuaciones cuadráticas completando cuadrados

El método de completar cuadrados con los algeplanos, consiste en construir o completar cuadrados con las piezas del algeplano que representa el primer miembro de la ecuación cuadrática en forma general para obtener una ecuación equivalente en forma de binomio al cuadrado sin o con término independiente.

Ejemplo.



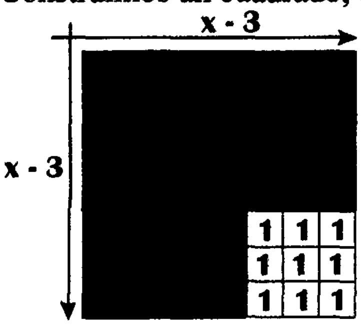


➢ **Resolución de ecuaciones cuadráticas en forma de binomio al cuadrado sin término independiente:** $(mx+n)^2 = 0$

Ejemplo N° 01: Resuelve la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$ **en forma de binomio al cuadrado.**

Resolución

Primero.- Construimos un cuadrado, con las piezas del algeplano.



Segundo.- Escribamos la expresión factorizada equivalente a $x^2-6x+9=0$, obtenida a partir de la construcción.

$$\Rightarrow\ x^2-6x+9=(x-3)(x-3)=(x-3)^2$$

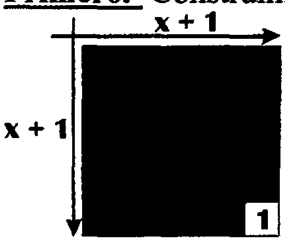
Tercero.- Resolviendo la ecuación equivalente se obtiene:

$$(x-3)(x-3)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{|l|} \text{Si, } x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ \text{Si, } x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{array}$$

Ejemplo N° 02: Resuelve la ecuación $x^2+2x+1=0$ en forma de binomio al cuadrado.

Resolución

Primero.- Construimos un cuadrado, con las piezas del algeplano.



Segundo.- Escribamos la expresión factorizada equivalente a $x^2+2x+1=0$, obtenida a partir de la construcción.

$$\Rightarrow\ x^2+2x+1=(x+1)(x+1)=(x+1)^2$$

Tercero.- Resolviendo la ecuación equivalente se obtiene:

$$(x+1)(x+1)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{|l|} \text{Si, } x+1=0 \Rightarrow x=1 \\ \text{Si, } x+1=0 \Rightarrow x=1 \end{array}$$

- **Resolución de ecuaciones cuadráticas en forma de binomio al cuadrado con término independiente: $(mx+n)^2=k$**

Toda ecuación cuadrática o de segundo grado de la forma: $ax^2+bx+c=0$; puede formar la forma: $(mx+n)^2=k$, tan solo completando cuadrados.

Para poder aplicar el método de completar cuadrados los coeficientes a y b de la ecuación deben cumplir las siguientes condiciones:

- *El coeficiente del término cuadrático (a), tiene que ser cuadrado perfecto.*
- *El coeficiente del término lineal (b), tiene que ser múltiplo de 2.*

En caso de que no cumpla alguna de las dos condiciones anteriores, podemos hacer que se cumpla multiplicando los dos miembros de la ecuación por $4a$.

Ejemplo Nº 01. Resolver, completando cuadrados: $x^2+6x+3=0$

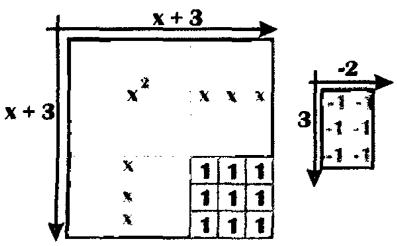
Resolución

Primero.- Comprobamos si se cumple las condiciones para la aplicación del método:

Los valores de los coeficientes son: $\begin{cases} a=1 \Rightarrow 1^2=1, \text{ es un cuadrado perfecto.} \\ b=6 \Rightarrow \dfrac{6}{2}=3, \text{ es múltiplo de dos.} \end{cases}$

$\therefore$ Cumple con las dos condiciones planteadas.

Segundo. Apliquemos el método de completar cuadrados para lo cual, construimos o completamos un cuadrado utilizando los algeplanos, para encontrar una ecuación de forma $(mx+n)^2=k$



Por lo tanto, obtenemos la ecuación cuadrática equivalente a $x^2+6x+3=0$ en forma de binomio al cuadrado. $(x+3)^2-6=0 \Rightarrow (x+3)^2=6$.

Tercero. Se extraen las raíces de los dos miembros; anteponiendo el signo a la raíz del término 6.

$\sqrt{(x+3)^2}=\pm\sqrt{6} \Rightarrow (x+3)=\pm\sqrt{6}$

Donde:

a) $x+3=+\sqrt{6} \Rightarrow x=+\sqrt{6}-3$

b) $x+3=-\sqrt{6} \Rightarrow x=-\sqrt{6}-3$

El conjunto solución de la ecuación: $x^2+6x+3=0$; es: $=\left\{-\sqrt{6}-3;+\sqrt{6}-3\right\}$

Ejemplo N° 02. Resolver, completando cuadrados: $4x^2+8x+3=0$

Resolución

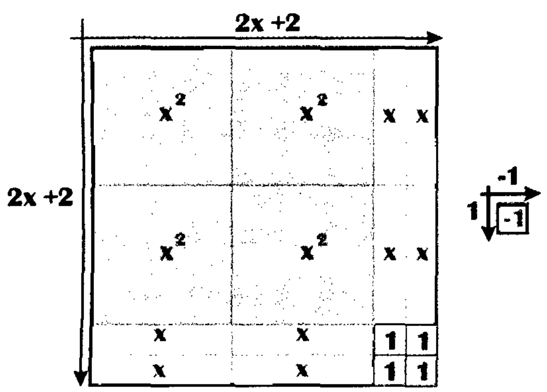
Primero.- Comprobamos si se cumple las condiciones para la aplicación del método:

Los valores de los coeficientes son:

$$\begin{cases} a=4 \Rightarrow 2^2=4, \text{ es un cuadrado perfecto.} \\ b=8 \Rightarrow \dfrac{8}{2}=4, \text{ es múltiplo de dos.} \end{cases}$$

$\therefore$ Cumple con las dos condiciones planteadas.

Segundo. Aplicamos el método de completar cuadrados para lo cual, construimos o completamos un cuadrado utilizando los algeplanos. Para encontrar una ecuación de forma $(mx+n)^2=k$



Por lo tanto, obtenemos la ecuación cuadrática equivalente a $4x^2+8x+3=0$ en forma de binomio al cuadrado. $(2x+2)^2-1=0 \Rightarrow (2x+2)^2=1$

Tercero. Se extraen las raíces de los dos miembros; anteponiendo el signo a la raíz del término 1.

$$\sqrt{(2x+2)^2}=\pm\sqrt{1} \Rightarrow (2x+2)=\pm 1$$

Donde:

a) $2x+2=+1 \Rightarrow 2x=+1-2 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

b) $2x+2=-1 \Rightarrow 2x=-1-2 \Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$

El conjunto solución de la ecuación: $4x^2+8x+3=0$; es: $=\left\{-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right\}$

Ejemplo N° 03. Resolver, completando cuadrados: $2x^2 - 2x - 1 = 0$

Resolución

Primero.- Comprobamos si se cumple las condiciones para la aplicación del método:

Los valores de los coeficientes son: $\begin{cases} a = 2 \Rightarrow \text{, no es un cuadrado perfecto.} \\ b = -2 \Rightarrow \dfrac{-2}{2} = -1 \text{, es múltiplo de dos.} \end{cases}$

$\therefore$ No cumple con las condiciones planteadas.

Entonces, Ajustamos los coeficientes para que se cumplan las condiciones:

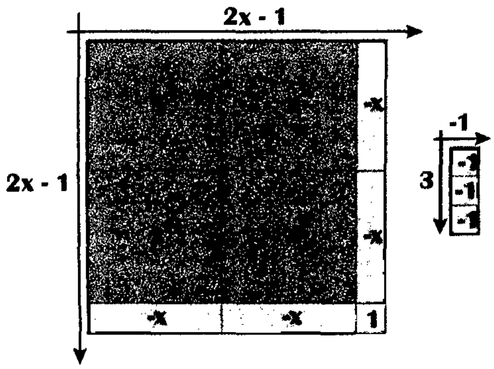
- Multiplicando a todo los términos de la ecuación inicial por $4a$.

  $4(2)(2x^2 - 2x - 1) = 0 \Rightarrow 4\times 2\times 2x^2 - 4\times 2\times 2x - 4\times 2\times 1 = 0$, dividiendo por $(\frac{1}{4})$, a todo los términos de la ecuación.

- Obtenemos una nueva ecuación equivalente que si cumple las condiciones:

  $\Rightarrow 4x^2 - 4x - 2 = 0$

Segundo. Aplicamos el método de completar cuadrados para lo cual, construimos o completamos un cuadrado utilizando los algeplanos. Para encontrar una ecuación de forma $(mx+n)^2 = k$



Por lo tanto, obtenemos la ecuación cuadrática equivalente a $4x^2 - 4x - 2 = 0$ en forma de binomio al cuadrado. $(2x-1)^2 - 3 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 = 3$

Tercero. Se extraen las raíces de los dos miembros; anteponiendo el signo de la raíz la término 3.

$$\sqrt{(2x-1)^2} = \pm\sqrt{3} \Rightarrow (2x-1) = \pm\sqrt{3}$$

Donde:

a) $2x-1=+\sqrt{3} \Rightarrow 2x=+\sqrt{3}+1 \Rightarrow x=\dfrac{+\sqrt{3}+1}{2}$

b) $2x-1=+\sqrt{3} \Rightarrow 2x=-\sqrt{3}+1 \Rightarrow x=\dfrac{-\sqrt{3}+1}{2}$

El conjunto solución de la ecuación: $4x^2-4x-2=0$; es: $=\left\{-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2};\dfrac{+\sqrt{3}+1}{2}\right\}$

☺ **Resolución de ecuaciones cuadráticas empleando la formula general.**

La generalización de completar cuadrados para una ecuación de segundo grado expresada en forma general. $(ax^2+bx+c=0)$

Nos proporciona una formula general para obtener las soluciones o raíces de la ecuación en función de los coeficientes a, b y c.

La formula general para resolver una ecuación cuadrática es:

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \Rightarrow$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ Primera solución

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ Segunda solución

Los procedimientos para resolver son los siguientes:

- ☞ Determinar los valores de los coeficientes **a, b y c,** de la ecuación cuadrática expresada en forma general.
- ☞ Remplazar los valores en la formula general, y realizar las operaciones, hasta obtener las soluciones.

Ejemplo N° 01: Resolver $x^2 - 2x - 3 = 0$

Resolución

Primero. Determinemos los coeficientes a, b y c de la ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 3 = 0$

Entonces: $a = 1$, $b = -2$ y $c = -3$

> *La ecuación debe tener la forma:* $ax^2 + bx + c = 0$, *para determinar los coeficientes.*

Segundo. Remplacemos los valores hallados en la formula general: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$\Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{2-4}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación cuadrática** $x^2 - 2x - 3 = 0$, **es :** $\{-1;3\}$

Ejemplo N° 02: Resolver $3x^2 + x - 6 = 0$

Resolución

Primero. Determinemos los coeficientes a, b y c de la ecuación cuadrática $3x^2 + x - 6 = 0$

Entonces: $a = 3$, $b = 1$ y $c = -6$

Segundo. Remplacemos los valores hallados en la formula general: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$\Rightarrow x=\frac{-(1)\pm\sqrt{(1)^2-4(3)(-6)}}{2(3)}=\frac{-1\pm\sqrt{73}}{6}\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-1+\sqrt{73}}{6} \\ x_2=x_1=\dfrac{-1-\sqrt{73}}{6}\end{array}}$$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación cuadrática** $3x^2+x-6=0$ **, es :**

$$\left\{\frac{-1-\sqrt{73}}{6};\frac{-1+\sqrt{73}}{6}\right\}$$

Ejemplo Nº 03: Resolver $3x^2-2x+1=0$

<u>Resolución</u>

<u>Primero</u>. Determinemos los coeficientes a, b y c de la ecuación cuadrática $3x^2-2x+1=0$

Entonces: $a=3$, $b=-2$ y $c=1$

<u>Segundo.</u> Remplacemos los valores hallados en la formula general: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$$\Rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(3)(1)}}{2(3)}=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{4(-2)}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{4}\sqrt{-2}}{6}=\frac{2\pm2\sqrt{2(-1)}}{2(3)}$$

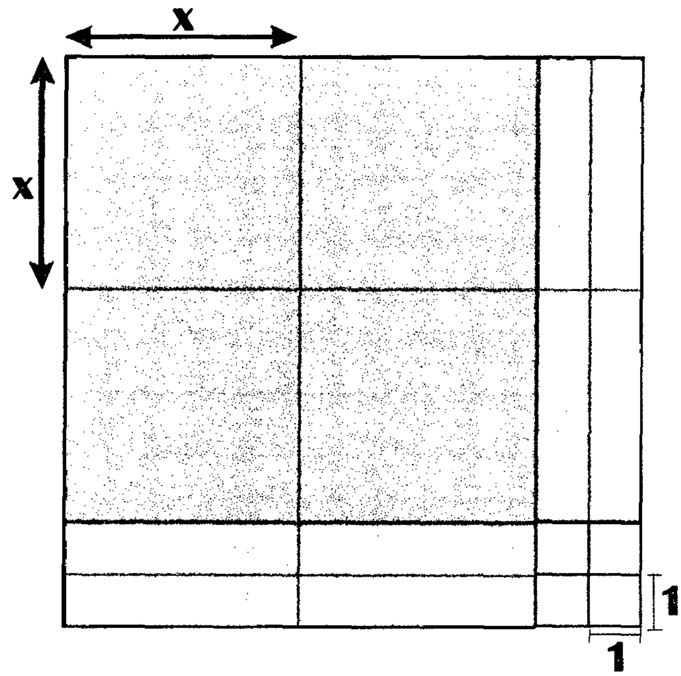
$x=\dfrac{1\pm\sqrt{2}\sqrt{-1}}{3}$; pues : $\sqrt{-1}=i$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{2}i}{3}\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1=\dfrac{1+\sqrt{2}i}{3} \\ x_2=\dfrac{1-\sqrt{2}i}{3}\end{array}}$$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación cuadrática** $3x^2+x-6=0$ **, es :** $\left\{\dfrac{1+\sqrt{2}i}{3};\dfrac{1-\sqrt{2}i}{3}\right\}$

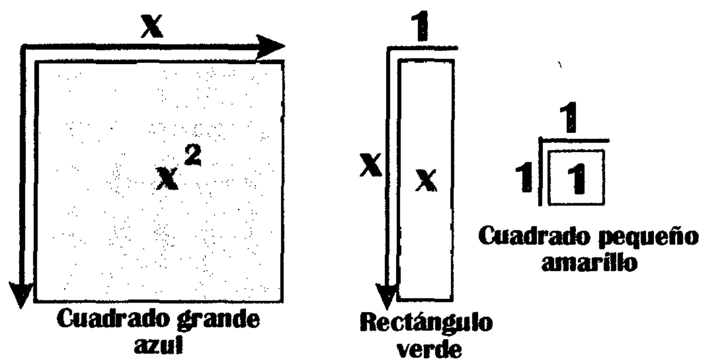
XII. Resolución de problemas cotidianos usando las ecuaciones cuadráticas con los algeplanos.

1) La plaza de armas de la ciudad de Abancay tiene diferentes losetas como muestra la figura. Calcular su área total de la plaza, si las losetas de la misma figura son iguales.



Resolución

Primero.- Identifiquemos las dimensiones de cada una de las losetas.

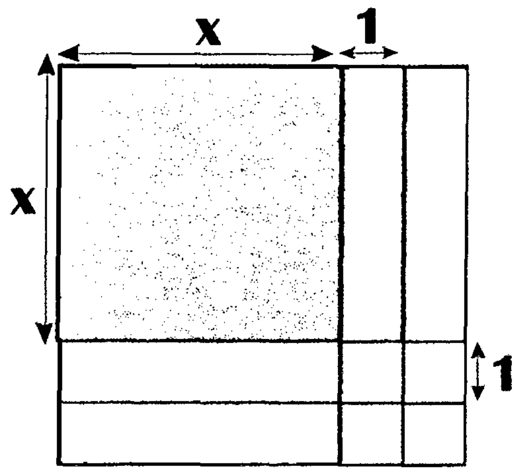


Segundo.- Sumando las áreas de cada loseta que lo conforma la figura, obtenemos.

$$\textbf{Área total} = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 + x + x + x + x + x + x + x + x + 1 + 1 + 1 + 1$$

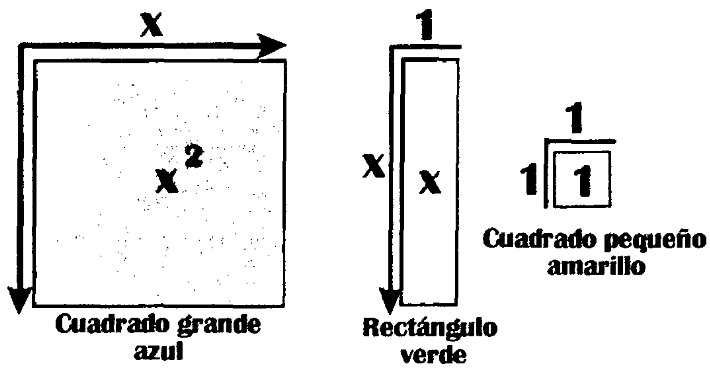
$$\Rightarrow \textbf{ área total de la plaza es} = 4x^2 + 8x + 4 = (2x+2)(2x+2) = (2x+2)^2$$

2) Una alumna del tercer grado de la I.E. "Aurora Inés Tejada", posee un terreno en el valle de Pachachaca, dividido en parcelas como muestra la figura. Su padre desea encontrar su área total para sembrar diferentes forrajes. Si las parcelas de la misma figura son iguales. ¿Cómo lo harías?



Resolución

Primero.- Identifiquemos las dimensiones de cada una de las parcelas.



Segundo.- Sumando las áreas de cada parcela obtenemos.

$$\textbf{Área total} = x^2 + x + x + x + x + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$\Rightarrow \ \textbf{área total del terreno es} := x^2 + 4x + 4 = (x+2)(x+2)$$

- ***Todo buen aprendizaje se activa mejor a través del descubrimiento.***
- ***Una clase debe estar poblada de ejemplos y materiales educativos.***

Cualquier consulta escribir a: ***alexito_188@hotmail.com***

BIBLIOGRAFÍA

1. COVEÑAS NAQUICHE, Manuel (2007). *MATEMÁTICA DE TERCER GRADO*. Lima-Perú: BRUÑO.

2. LARRUBIA MARTINES, Juan J (2008). *RESOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON PUZZLE ALGEBRAICO*. Consultado en 02/02/2010 en http://ific.uv.es/fisicaenaccion/actas04/Materialesdidmatematicas.pdf.

3. Leitze, A. R. y Kitt, N. A. 2000. *USING HOMEMADE ALGEBRA TILES TO DEVELOP ALGEBRA AND PREALGEBRA CONCEPS*. Mathematics Teacher, Vol. 93 issue 6, september, (pag. 462-520).

4. MINEDU (2006). *GUIAS DE ALGEPLANOS*. Lima-Perú.

5. MINEDU (2009). *DISEÑO CURRICULAR NACIONAL*. Consultado en 22/11/2009 en www.minedu.gob.pe.

6. SALVADOR TIMOTEO (2005). *RAZONAMIENTO MATEMÁTICO SIGLO XXI*. Lima-Perú: BRUÑO.

7. STONE, Tony Y NICHOLAS, Betty (2004). *POLYNOMIALS AND FACTORING*. Consultado en 03/02/2010 en http://www.classzone.com/vpg_ebooks/ml_algebra_1_2004/accessibility/ml_algebra_1_2004/page_610.pdf.

8. TORI LOZA, Armando (2000). *PROBLEMAS DE ALGEBRA Y COMO RESOLVERLOS*. Lima-Perú: RACSO.

9. TORRES MATTOS, Carlos (2000). *ALGEBRA TEORIA Y PRÁCTICA*. Lima-Perú: RACSO.

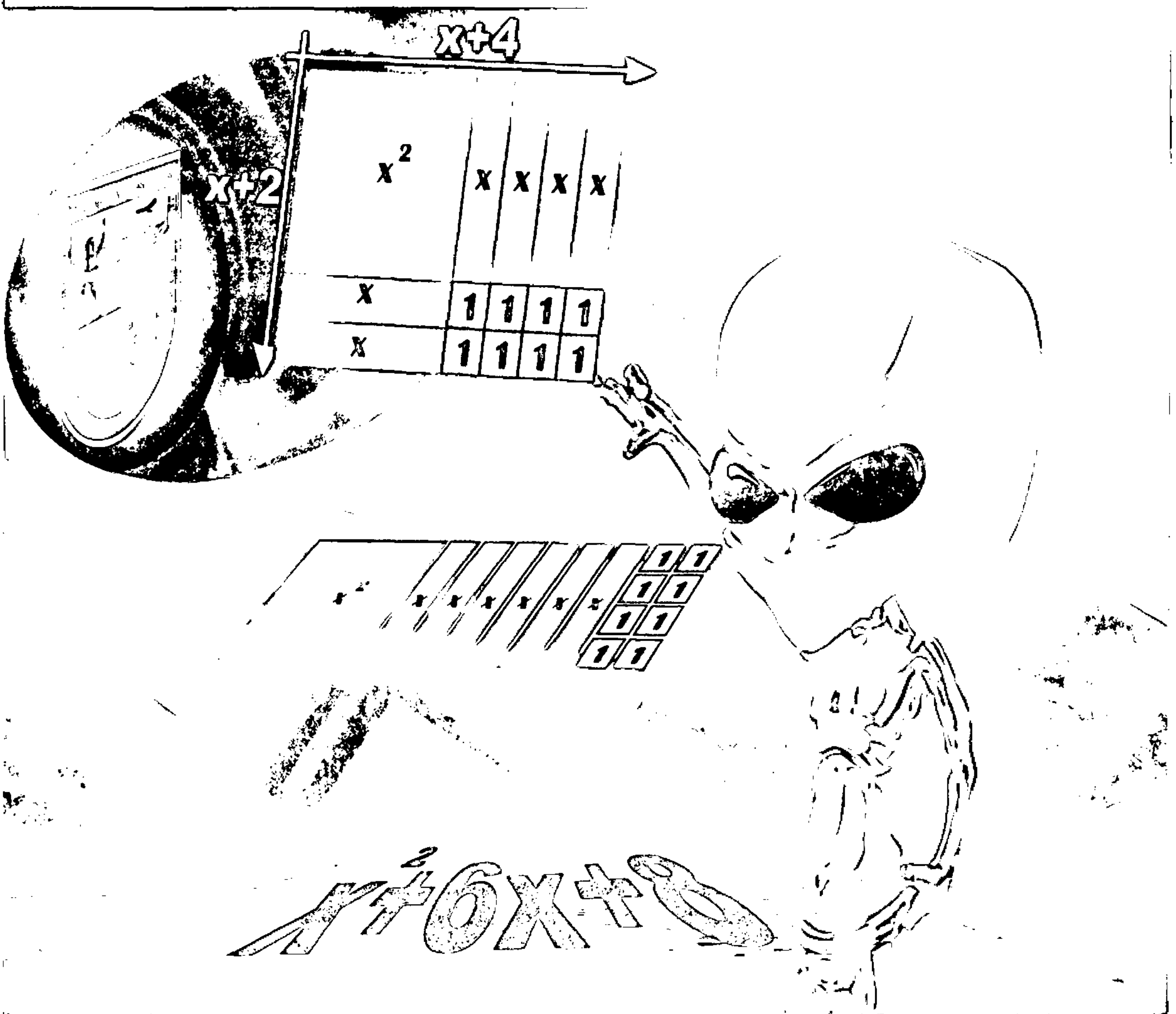
10. VERA GUTIÉRREZ, Carlos. E (2007). *MATEMÁTICA DE TERCER GRADO*. Lima-Perú: BRUÑO.

11. MINEDU (2007). *GUIA DE EVALUACIÓN DE APRENDIZAJE*. Lima-Perú.

REPRESENTACIÓN Y RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

CON ALGEPLANOS

CUADERNILLO DE ACTIVIDADES Y EJERCICIOS



NOMBRE Y APELLIDO:

BACH. ALEX A. PUMACAYO VERA
BACH. LUIS A. ALATA NARVAEZ

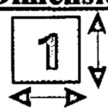
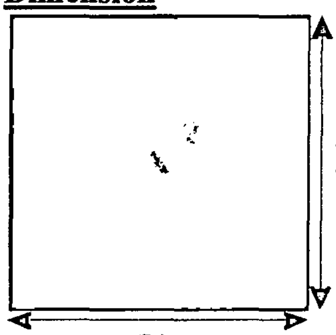
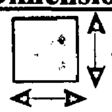
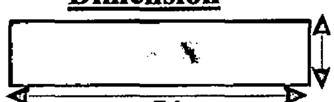
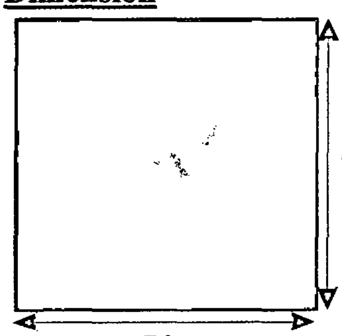
Representación y resolución de ecuaciones cuadráticas con algeplanos

I. DESCRIPCIÓN DEL MATERIAL DIDÁCTICO ALGEPLANO

Nominamos algeplanos a un conjunto de piezas de figuras geométricas planas, formada por cuadrados y rectángulos, hechos de un material microporoso grueso, no toxico, y en colores variados para estimular la percepción visual.

Un juego de algeplano contiene un total de 164 piezas. Se distinguen en dos tipos según su forma (cuadrado y rectángulo), tres tipos según su tamaño (cuadrado grande, rectángulo y cuadrado pequeño) y dos tipos según su valor (positivo y negativo).

NOTA: ***El valor de X es igual a 4.5 cm para elaborar el material.***

Cuadrado de área 1 (positivo)	**Rectángulo de área X (positivo)**	**Cuadrado de área X^2 (positivo)**
Nombre Cuadrado pequeño amarrillo (positivo). **Dimensión**  1 cm 1 cm **Cantidad** 49 Unidades	**Nombre** Rectángulo verde (positivo) **Dimensión**  1 cm X cm **Cantidad** 24 Unidades	**Nombre** Cuadrado grande azul (positivo) **Dimensión**  X cm X cm **Cantidad** 9 Unidades
Cuadrado de área -1 (negativo)	**Rectángulo de área –X (negativo)**	**Cuadrado de área $-X^2$ (negativo)**
Nombre Cuadrado pequeño rojo (negativo). **Dimensión**  -1 cm 1 cm **Cantidad** 49 Unidades	**Nombre** Rectángulo rojo (negativo) **Dimensión**  -1 cm X cm **Cantidad** 24 Unidades	**Nombre** Cuadrado grande rojo (negativo) **Dimensión**  -Xcm X cm **Cantidad** 9 Unidades

A pesar de que las áreas y las medidas de los lados de los rectángulos no pueden ser negativas, en la representación desarrollada, las piezas negativas, representan figuras con área negativa puesto que uno de sus lados es negativo.

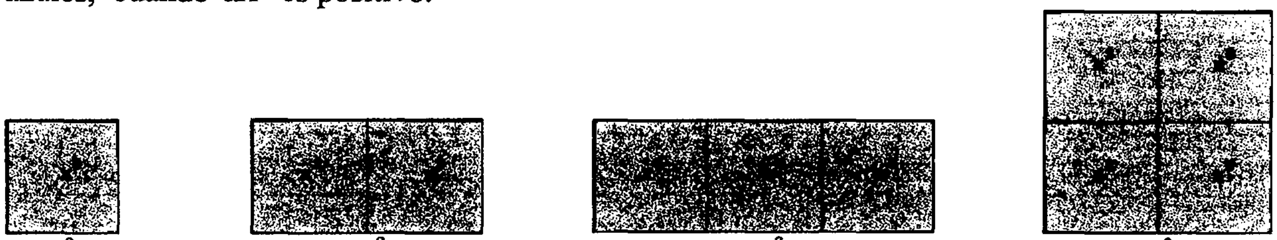
II. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS TÉRMINOS DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA CON LOS ALGEPLANOS

Toda expresión de 2° grado en forma general completa ($ax^2 + bx + c$) o incompleta ($ax^2 + bx$ **o** $ax^2 + c$) puede ser representada geométricamente por un conjunto de piezas del algeplano.

Esta representación geométrica se realiza término a término.

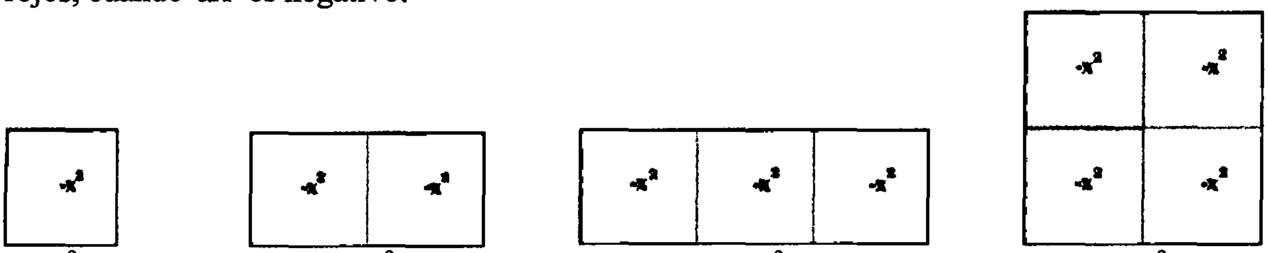
En resumen:

1. ***El término cuadrático positivo.***- Se representa mediante uno o conjunto de cuadrados grandes azules, cuando ax^2 es positivo.



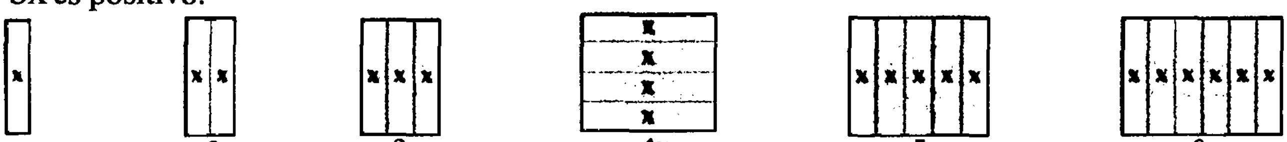
x^2 $2x^2$ $3x^2$ $4x^2$ ...

2. ***El término cuadrático negativo.***- Se representa mediante uno o conjunto de cuadrados grandes rojos, cuando ax^2 es negativo.



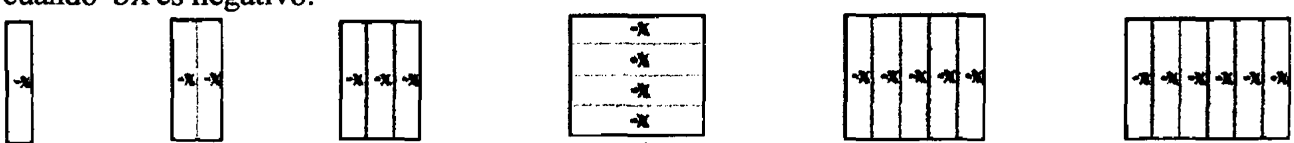
$-x^2$ $-2x^2$ $-3x^2$ $-4x^2$ ...

3. ***El término lineal positivo.***- Se representa mediante uno o conjunto de rectángulos verdes, cuando bx es positivo.



x $2x$ $3x$ $4x$ $5x$ $6x$ ...

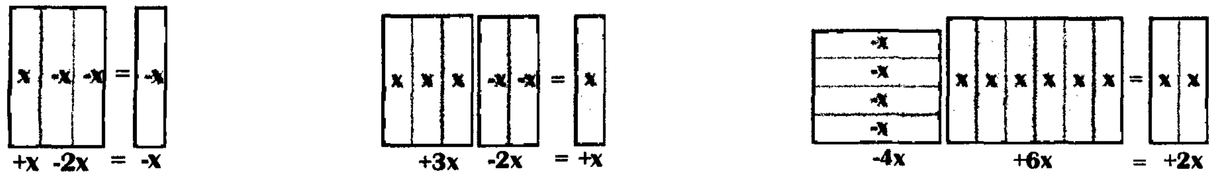
4. ***El término lineal negativo*** $(-bx)$.- Se representa mediante uno o conjunto de rectángulos rojos, cuando bx es negativo.



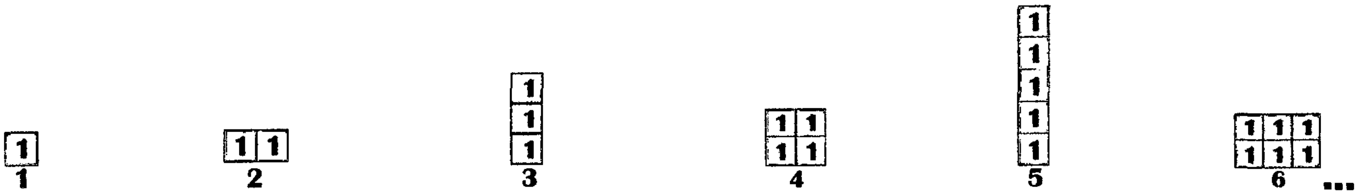
$-x$ $-2x$ $-3x$ $-4x$ $-5x$ $-6x$ ...

Nota:
*La combinación de dos grupos o conjunto de rectángulos x y $-x$ como se indica en las figuras, siempre que la suma algebraica de los dos grupos coincida con el término bx que queremos representar. Aquí se aplica el principio de 0: **"pares de valores opuestos se anulan"***

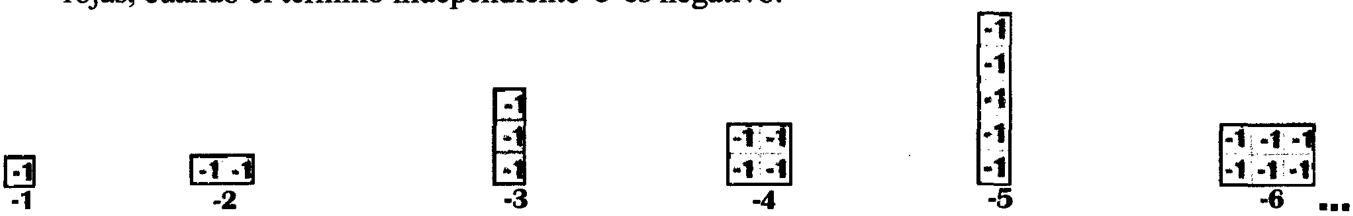
Ejemplos



5. ***El término independiente positivo***.- Se representa mediante una unidad o conjunto de unidades amarillos, cuando el término independiente c es positivo.

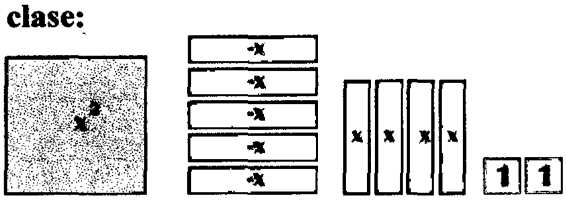


6. ***El término independiente negativo***.- Se representa mediante una unidad o conjunto de unidades rojas, cuando el término independiente c es negativo.



1) Dada las siguientes piezas del algeplano, representa y simplifica en una expresión de segundo grado.

Recuerda el ejemplo visto en clase:



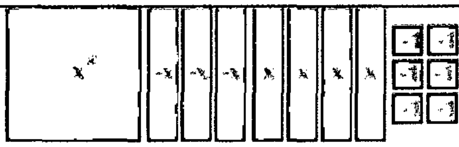
Resolución

- Escribiendo la suma de todos los valores de las piezas, tenemos la siguiente expresión:

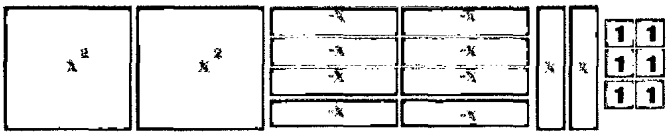
$$x^2 - x - x - x - x - x + x + x + x + x + 1 + 1$$

- Agrupando términos y simplificando , obtenemos la expresión de 2° grado:

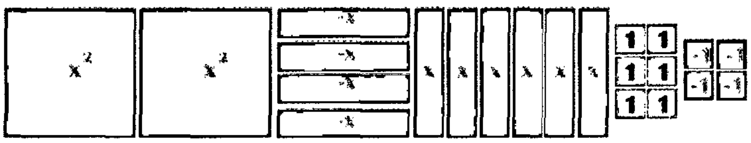
$$\boxed{x^2 - x + 2}$$

a) 

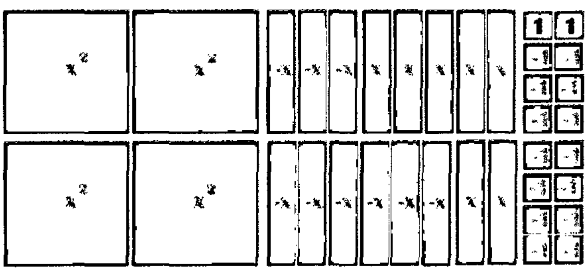
- Escribe la suma de todos los valores de las piezas.
- Agrupando términos y simplificando, se obtiene la expresión de 2° grado:

b) 

- Escribe la suma de todos los valores de las piezas.
- Agrupando términos y simplificando, se obtiene la expresión de 2° grado:

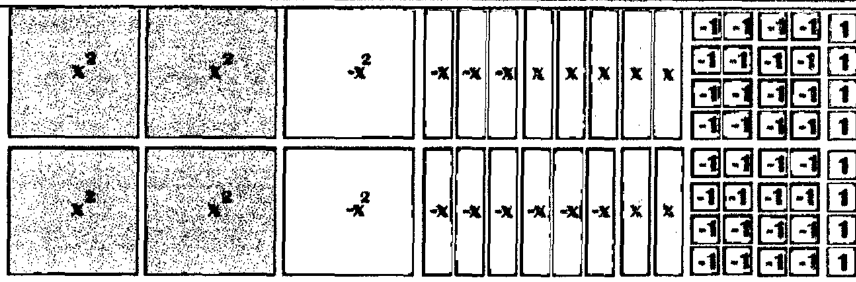
c) 

- Escribe la suma de todos los valores de las piezas.
- Agrupando términos y simplificando, se obtiene la expresión de 2° grado:

d) 

- Escribe la suma de todos los valores de las piezas.
- Agrupando términos y simplificando, se obtiene la expresión de 2° grado:

e)



- Escribe la suma de todos los valores de las piezas.

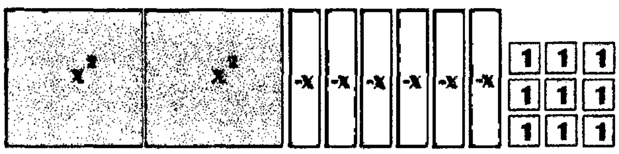
- Agrupando términos y simplificando, se obtiene la expresión de 2° grado:

2) Dibuja las siguientes piezas del algeplano que representan geométricamente cada una de las siguientes expresiones algebraicas.

Recuerda el ejemplo visto en clase para: $2x^2 - 6x + 9$

Resolución

Seleccionando las piezas del algeplano obtenemos la siguiente representación.



a) $x^2 - 5x + 1$

Seleccionando las piezas del algeplano se obtiene la siguiente representación.

b) $2x^2 + 3x - 5$

Seleccionando las piezas del algeplano se obtiene la siguiente representación.

c) $4x^2+8x-12$

Seleccionando las piezas del algeplano se obtiene la siguiente representación.

d) $2x^2+10x-3x-4$

Seleccionando las piezas del algeplano se obtiene la siguiente representación.

e) $5x^2-x^2+x-4x-5$

Seleccionando las piezas del algeplano se obtiene la siguiente representación.

Recuerda la forma general de una ecuación cuadrática:

$$\boxed{ax^2+bx+c=0}$$

Donde **a, b y c** son llamados coeficientes y X es la variable de la ecuación.

- El coeficiente "a" se llama coeficiente **cuadrática** o de **segundo grado.**
- El coeficiente "b" se llama coeficiente **lineal** o de **primer grado.**
- El coeficiente "c" se llama término **lineal.**

Términos de una ecuación

$ax^2 + bx + c = 0$

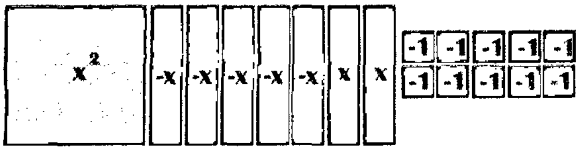
Término independient

Término lineal (TL)

Término cuadrático (T

3) Dada las siguientes representaciones geométricas, encontrar la representación simbólica e indicar sus coeficientes y términos.

Recuerda el ejemplo visto en clase. Dada la siguiente representación geométrica, simplifica e indica sus coeficientes y términos.



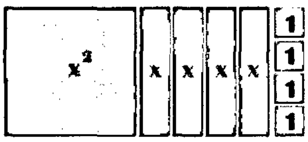
$= \quad 0$

Resolución

Simplificando los términos obtenemos la expresión de 2° grado: $\boxed{1x^2 - 3x - 10 = 0}$

Donde:

- ✓ Los coeficientes son: **a = 1, b = -3 y c = -10**
- ✓ Los términos son: $TC = x^2, TL = -3x, TI = -10$

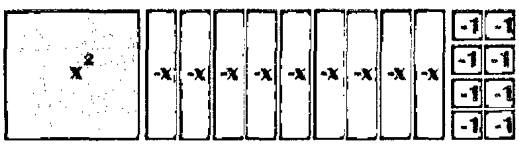
a) 

$= \quad 0$

Simplificando los términos se obtiene la expresión de 2° grado:

Donde:

- ✓ Los coeficientes son: **a =……, b = ……… y c = …………**
- ✓ Los términos son: $TC = ..., TL = ..., TI = ...$

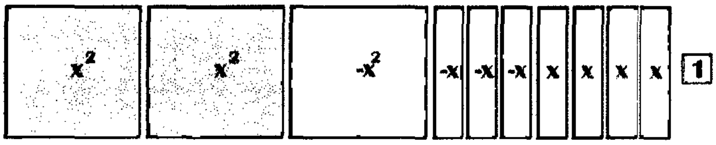
b) 

$= \quad 0$

Simplificando los términos se obtiene la expresión de 2° grado:

Donde:

- ✓ Los coeficientes son: **a =……, b = ……… y c = …………**
- ✓ Los términos son: $TC = ..., TL = ..., TI = ...$

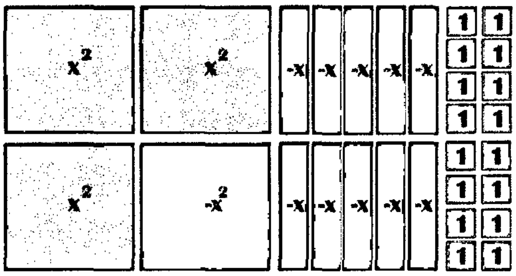
c) 

$= \quad 0$

☞ Simplificando los términos se obtiene la expresión de 2° grado:

Donde:

- ✓ Los coeficientes son: **a =……, b = ……… y c = …………**
- ✓ Los términos son: TC = ……, TL = ……, TI = ………

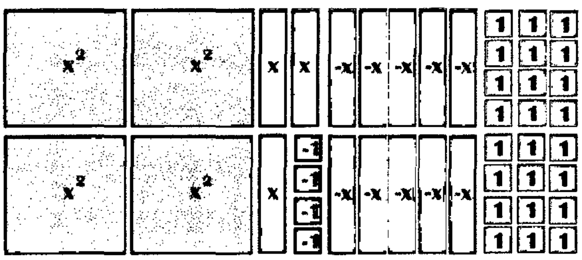
d) 

$= \quad 0$

☞ Simplificando los términos se obtiene la expresión de 2° grado:

Donde:

- ✓ Los coeficientes son: **a =……, b = ……… y c = …………**
- ✓ Los términos son: TC = ……, TL = ……, TI = ………

e) 

$= \quad 0$

☞ Simplificando los términos se obtiene la expresión de 2° grado:

Donde:

- ✓ Los coeficientes son: **a =……, b = ……… y c = …………**
- ✓ Los términos son: TC = ……, TL = ……, TI = ………

4) Dada las siguientes expresiones algebraicas simplifica e identifica sus coeficientes y términos.

Recuerda el ejemplo visto en clase. Dada la siguiente expresión algebraica $2x^2-8x+9=-2x$. **Simplifica e identifica sus coeficientes y términos.**

Resolución

☞ **Agrupando los términos semejantes.**

$$2x^2-8x+2x+9=0$$

☞ **Simplificando los términos obtenemos:** $\boxed{2x^2-6x+9=0}$

Donde:

- Los coeficientes son: **a = 2, b = -6 y c = 9.**
- Los términos son: **TC =** $2x^2$, **TL =** $-6x$, **TI =** $+9$

a) $2(x^2-2x+3x+4)=0$

☞ **Agrupando los términos semejantes.**

☞ **Simplificando los términos obtenemos:** $\boxed{\quad}$

Donde:

- Los coeficientes son: **a = ……., b = …….. y c = ………...**
- Los términos son: **TC =………., TL =…………., TI = ………….**

b) $-4x^2+x+8=-5x^2-2x$

☞ **Agrupando los términos semejantes.**

☞ **Simplificando los términos obtenemos:** $\boxed{\quad}$

Donde:

- Los coeficientes son: **a = ……., b = …….. y c = ………...**
- Los términos son: **TC =………., TL =…………., TI = ………….**

c) $2(x^2+3x)+15=5x-2(x+3)$

☞ **Agrupando los términos semejantes.**

☞ **Simplificando los términos obtenemos:** $\boxed{\quad}$

Donde:

- Los coeficientes son: **a = ……., b = …….. y c = ………...**
- Los términos son: **TC =………., TL =…………., TI = ………….**

d) $10x^2 + 5(-3x + 7) = 3(2x^2 - x) - 5 - x$

☞ **Agrupando los términos semejantes.**

☞ **Simplificando los términos obtenemos:**

Donde:

- Los coeficientes son: **a = ……., b = …….. y c = ………...**
- Los términos son: **TC =………., TL =…………., TI = ………….**

e) $2(x^2 + 9) + 2(4x^2 - 3x + 7) = 2(x^2 + 9) - x$

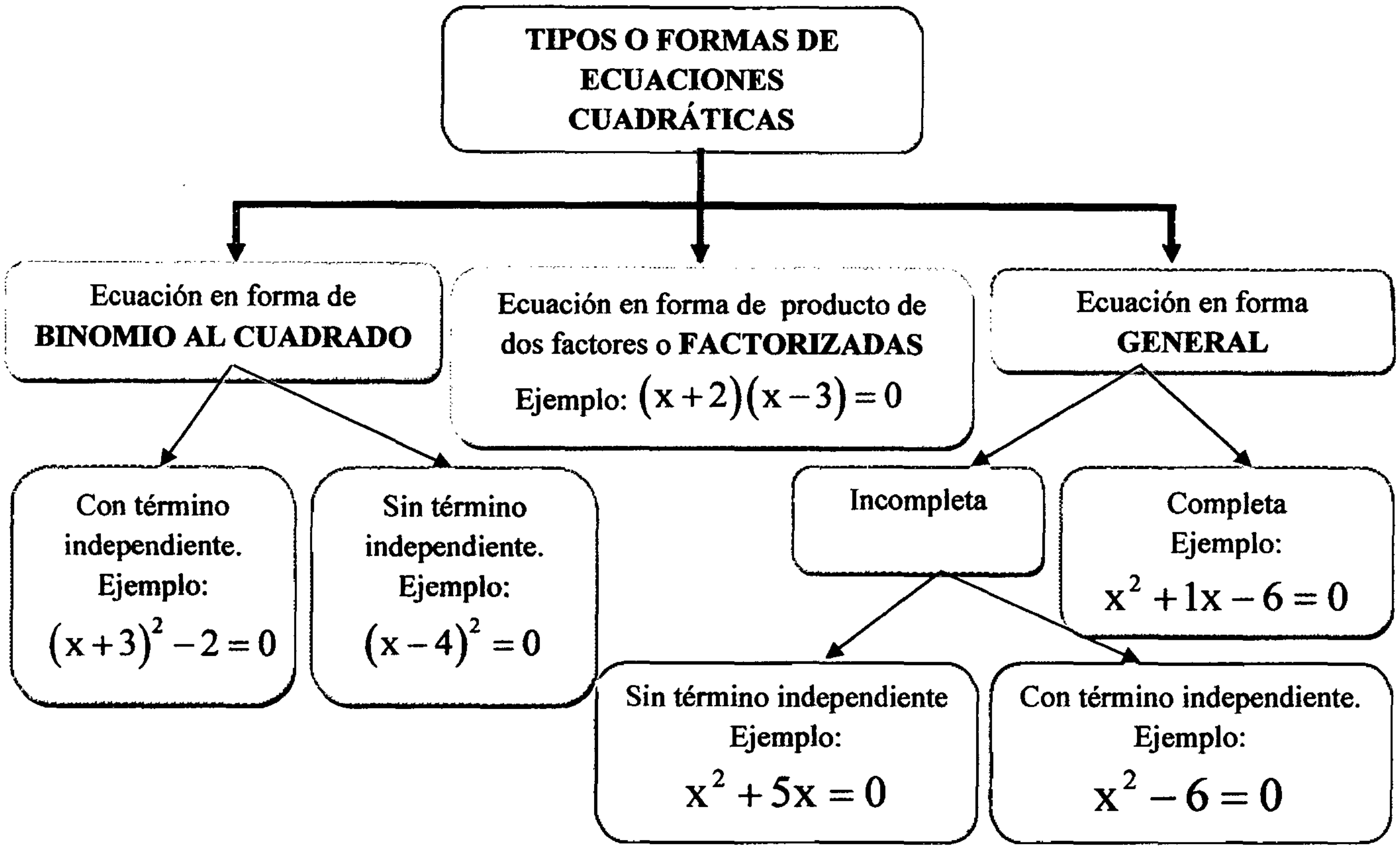
☞ **Agrupando los términos semejantes.**

☞ **Simplificando los términos obtenemos:**

Donde:

- Los coeficientes son: **a =……., b =…….. y c =………...**
- Los términos son: **TC =………., TL =…………., TI =………….**

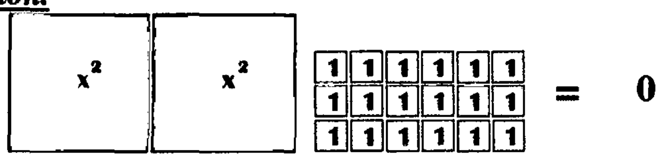
Recordando sobre tipos o forma que se muestran en las ecuaciones cuadráticas.



5) Representa la siguiente ecuación general incompleta con término independiente en forma geométrica y simbólica, utilizando los algeplanos.

☺ **Recuerda el ejemplo visto en clase Representa la siguiente ecuación cuadrática $2x^2+18=0$, con los algeplanos.**

Resolución.



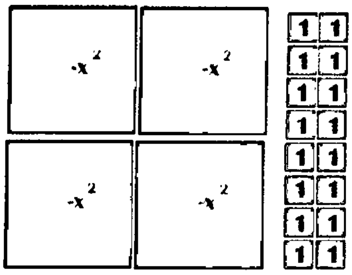
a) $-x^2+9=0$

Resolución.

b) $2x^2-16=0$

Resolución.

☺ Recuerda el ejemplo visto en clase Dada la siguiente representación geométrica, representar en forma simbólica.

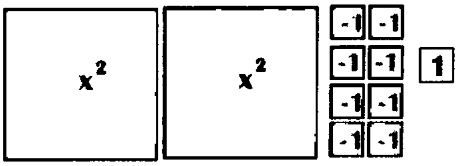


$= \quad 0$

Resolución.

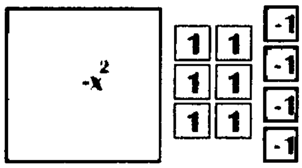
$$\boxed{-4x^2+16=0}$$

c)



Resolución

d)

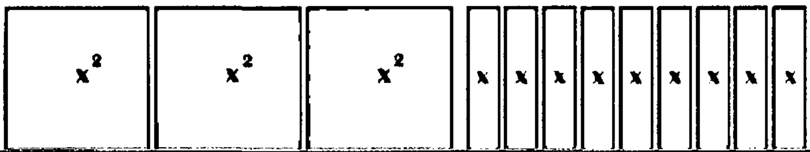


Resolución

6) Representa la siguiente ecuación general incompleta sin término independiente en forma geométrica y simbólica, utilizando los algeplanos.

☺ **Recuerda el ejemplo visto en clase. Representar la siguiente ecuación cuadrática $3x^2+9x=0$, con los algeplanos.**

Resolución



$= \quad 0$

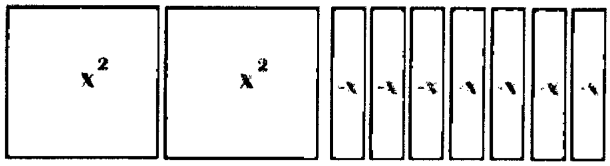
a) $2x^2-3x=0$

Resolución

b) $3x^2+2x-5x=0$

Resolución

☺ Recuerda el ejemplo visto en clase. Dada la siguiente representación geométrica, representar en forma simbólica.

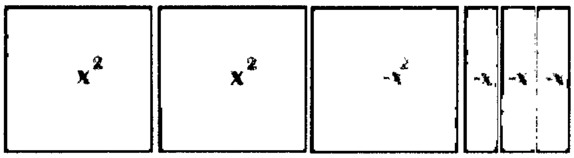


= 0

Resolución

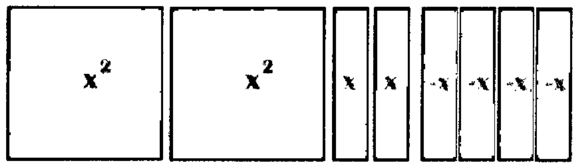
$$\boxed{2x^2 - 7x = 0}$$

c)



Resolución

d)

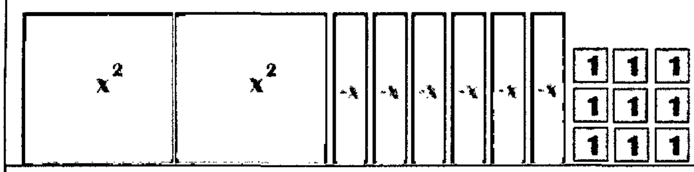


Resolución

7) Representa la siguiente ecuación cuadrática completas en forma geométrica y simbólica, utilizando los algeplanos.

Recuerda el ejemplo visto en clase. Representar la siguiente ecuación cuadrática $2x^2 - 6x + 9 = 0$, con los algeplanos.

Resolución



= 0

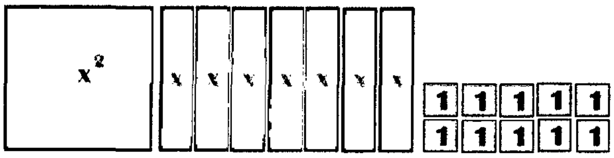
a) $x^2 - 3x + 12 = 0$

Resolución

b) $2x^2 - 4x + 2x + 2 = 0$

Resolución

Recuerda el ejemplo visto en clase. **Dada la siguiente representación geométrica, representar en forma simbólica.**

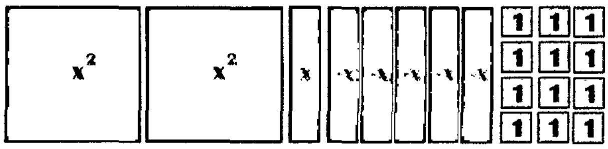


$= \quad 0$

Resolución

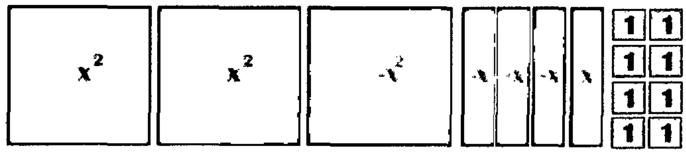
$$x^2 + 7x + 10 = 0$$

c)



Resolución

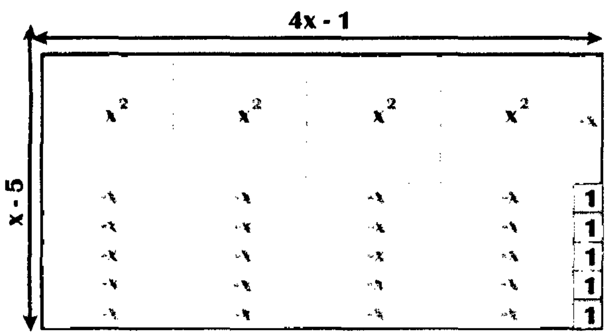
d)



Resolución

8) Representa la siguiente ecuación en forma de producto de dos factores o factorizadas, con los algeplanos.

Recuerda el ejemplo visto en clase. **Dada la siguiente representación geométrica, representar en forma simbólica.**

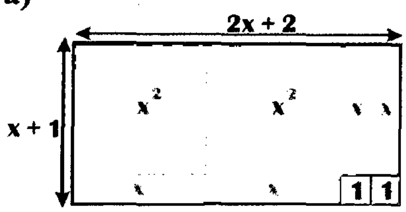


$= \quad 0$

Resolución

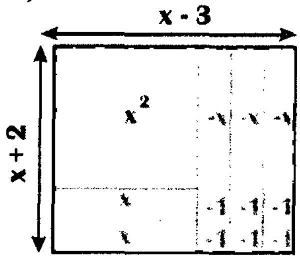
$$(4x - 1)(x - 5) = 0$$

a)



Resolución

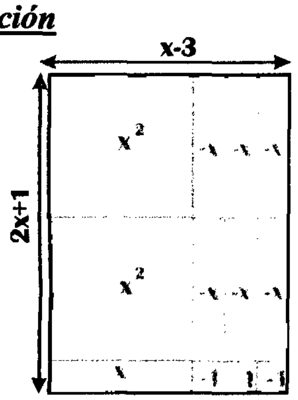
b)



Resolución

Recuerda el ejemplo visto en clase. Representar la siguiente ecuación cuadrática $(2x+1)(x-3)=0$, con los algeplanos.

Resolución



= 0

c) $(x+1)(x+2)=0$

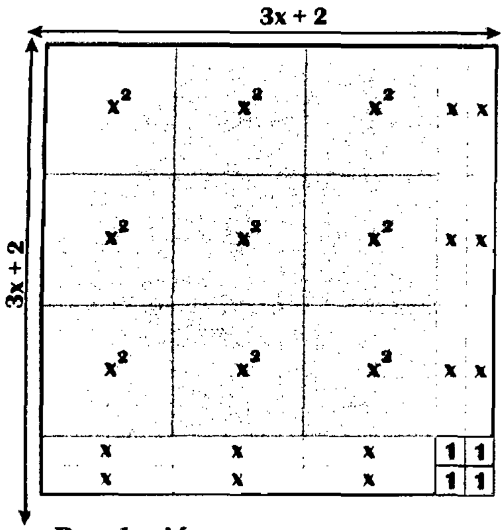
Resolución

d) $(2x+3)(x-1)=0$

Resolución

9) **Representa la siguiente ecuación cuadrática en forma de binomio al cuadrado sin término independiente, utilizando con los algeplanos.**

Recuerda el ejemplo visto en clase. Dada la siguiente representación geométrica, representar en forma simbólica.

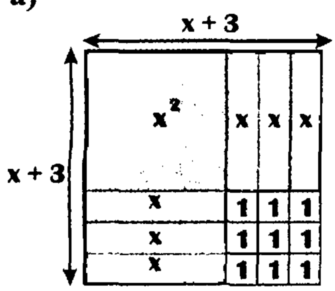


$= \quad 0$

Resolución

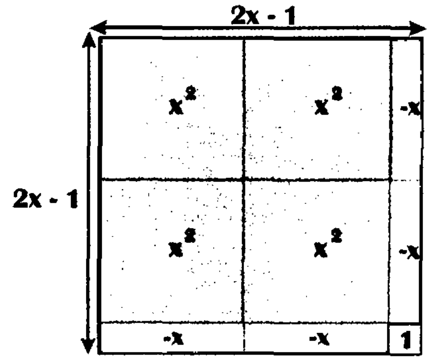
$$(3x+2)(3x+2)=(3x+2)^2=0$$

a)



Resolución

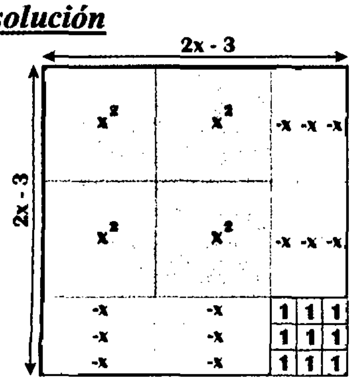
b)



Resolución

Recuerda el ejemplo visto en clase. Representar la siguiente ecuación cuadrática $(2x-3)^2=0$, con los algeplanos.

Resolución



$= \quad 0$

a) $(x-2)^2 = 0$

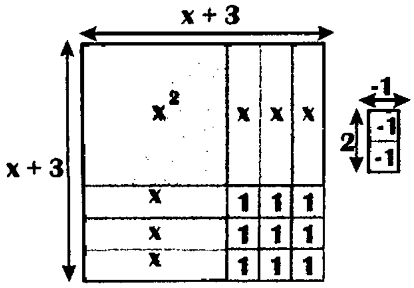
Resolución

b) $(2x+4)^2 = 0$

Resolución

10) **Representa la siguiente ecuación cuadrática en forma de binomio al cuadrado con término independiente, utilizando con los algeplanos.**

De la siguiente representación geométrica, representar en forma simbólica.

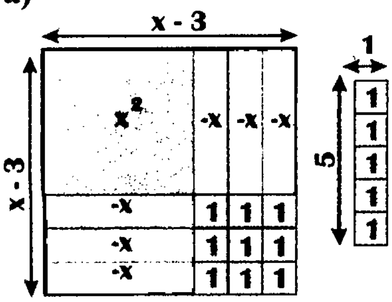


$= 0$

Resolución

$$(x+3)^2 - 2 = 0$$

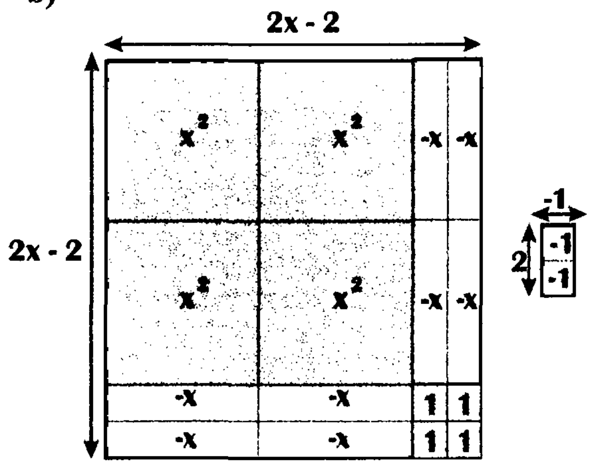
a)



$= 0$

Resolución

b)

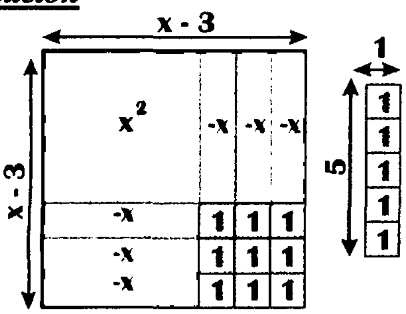


$= 0$

Resolución

Representar la siguiente ecuación cuadrática $(x-3)^2+5=0$, con los algeplanos.

Resolución



$=\quad 0$

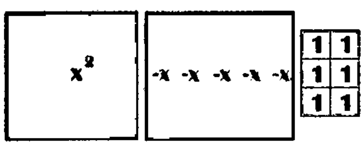
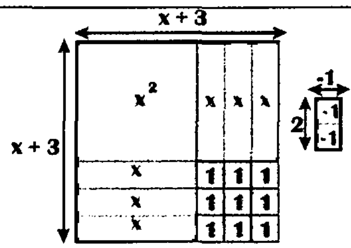
c) $(x+1)^2-3=0$

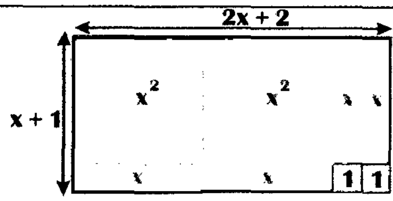
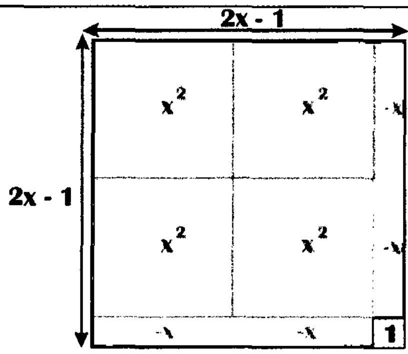
Resolución

d) $(2x-2)^2+2=0$

Resolución

11) Completa la siguiente tabla como muestra en el primer ejemplo, con el apoyo de los ejercicios desarrollados y en el mapa conceptual que se muestra en la página anterior.

Representación simbólica	Representación geométrica	Tipo o forma de ecuación
a) $x^2-5x+6=0$		Ecuación general completa
b)		

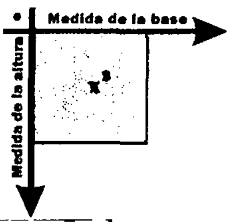
c) $2x^2 + x = 0$		
d)		
e) $x^2 - 4 = 0$		
f)		
g) $(x+2)(x-5) = 0$		

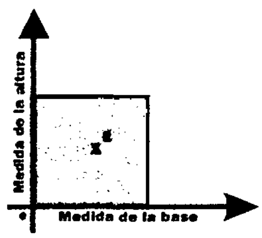
h) $3x^2 - 9 = 0$

i) $(x-3)^2 + 5 = 0$

Recordemos las reglas para la construcción de rectángulos y cuadrados con los algeplanos

Primera regla. El término cuadrático (x^2) o (**cuadrados grandes de color azul o rojo**), tienen que estar ubicados en una de las esquinas ya sea en la parte superior o inferior, como se muestra en las siguientes figuras.





Segunda regla.- Los términos independientes (c) o (cuadrados pequeños de color amarillo o rojo), tienen que estar agrupados en un único bloque, formando un rectángulo o cuadrado.

: Para armar las dimensiones de los bloques de las unidades tenemos que extraer sus factores al término independiente.

Ejemplo N° 01.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \rightarrow 9 = 3 \times 3$$

	3		
	1	1	1
3	1	1	1
	1	1	1

Bloque de unidades positivas

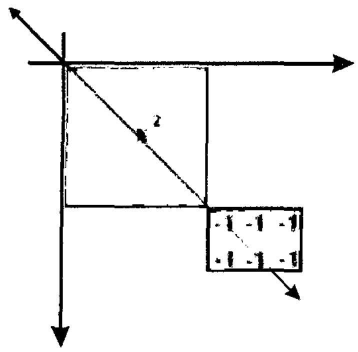
Ejemplo N° 02.

$$\begin{array}{r|l} -6 & -2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \rightarrow -6 = (-2) \times 3$$

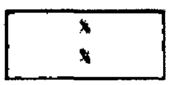
	3		
-2	-1	-1	-1
	-1	-1	-1

Bloque de unidades negativas

Tercera regla.- La pieza x^2 y los bloques de las unidades, tienen que estar situadas en diagonal, como se muestra en la imagen.



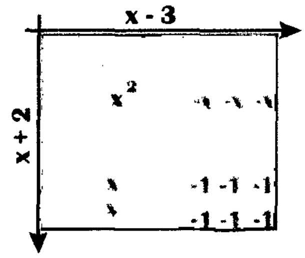
Cuarta regla.- Los términos lineales (bx) o (rectángulos de color verde y rojo), no pueden estar mezclados en un solo bloque. Cada color tiene que formar su propio bloque en forma vertical u horizontal.



forma horizontales

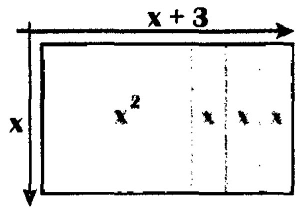
forma verticales

Quinta regla.- Construiremos un rectángulo o cuadrado, uniendo las reglas 3 y 4.

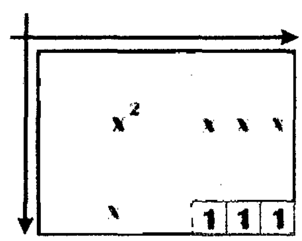


12) Escribe las dimensiones de los siguientes rectángulos y cuadrados

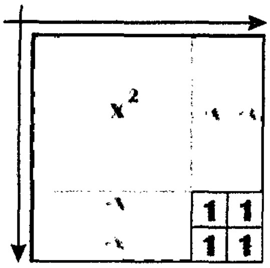
Ejemplo: Las dimensiones de la figura es:



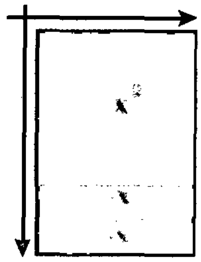
a)



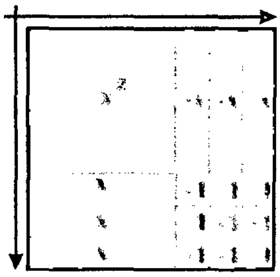
b)


x²
x x
x
x
1 1
1 1

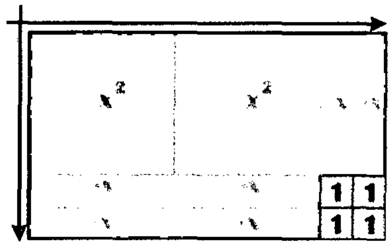
c)


x²
x
x

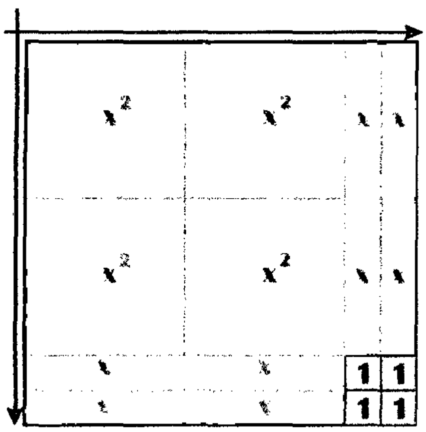
d)


x²
x x x
x
x
x
1 1 1
1 1 1
1 1 1

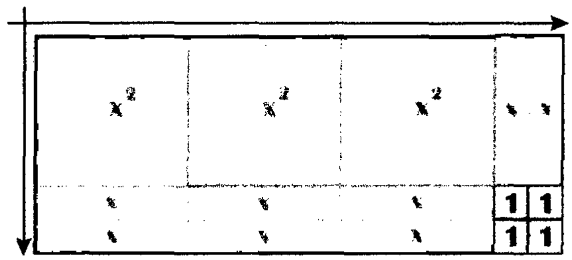
e)


x² x² x x
x x
x x
1 1
1 1

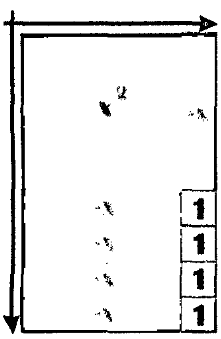
f)


x² x² x x
x² x² x x
x x
x x
1 1
1 1

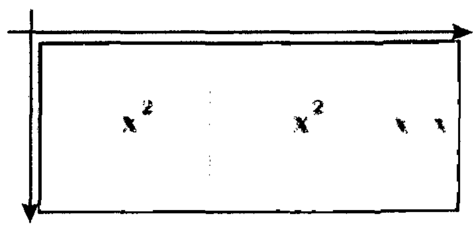
g)


x² x² x² x x
x x x
x x x
1 1
1 1

h)


x² x
x
x
x
x
1
1
1
1

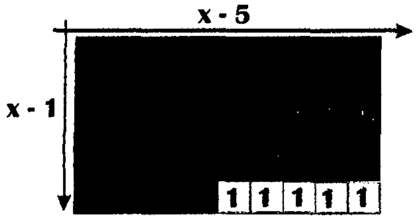
i)


x² x² x x

13) Factoriza las siguientes expresiones. A partir de la construcción de un rectángulo con algeplano.

Recordando el ejemplo visto en clase para. $x^2 - 6x + 5$

Primero.- Construimos un rectángulo utilizando las piezas del algeplano.



Segundo.- Escribimos la expresión factorizada equivalente a $x^2 - 6x + 5$ obtenida a partir de la construcción.

$$\Rightarrow \; x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$$

a) $x^2 - 2x + 1$

☞ Construye un rectángulo utilizando las piezas del algeplano.

☞ Escribimos la expresión factorizada equivalente a $x^2 - 2x + 1$ obtenida a partir de la construcción.

$$\Rightarrow \; x^2 - 2x + 1 =$$

b) $x^2 + 5x + 6$

☞ Construye un rectángulo utilizando las piezas del algeplano.

☞ Escribimos la expresión factorizada equivalente a $x^2 + 5x + 6$ obtenida a partir de la construcción.

$$\Rightarrow \; x^2 + 5x + 6 =$$

c) $x^2 - 6x + 9$

☞ Construye un rectángulo utilizando las piezas del Algeplano.

☞ Escribimos la expresión factorizada equivalente a $x^2 - 6x + 9$ obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 =$

d) $2x^2 + 7x + 3$

☞ Construye un rectángulo utilizando las piezas del algeplano.

☞ Escribimos la expresión factorizada equivalente a $2x^2 + 7x + 3$ obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow 2x^2 + 7x + 3 =$

e) $2x^2 - 8x$

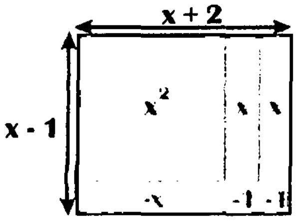
☞ Construye un rectángulo utilizando las piezas del algeplano.

☞ Escribimos la expresión factorizada equivalente a $2x^2 - 8x$ obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow 2x^2 - 8x =$

14) Las soluciones o raíces de una ecuación cuadrática son los valores de X que al sustituirlos en la ecuación, hacen que la igualdad se cumpla.

Ejemplo visto en clase: Dada la siguiente representación geométrica con dimensiones $(x-1)(x+2)=0$



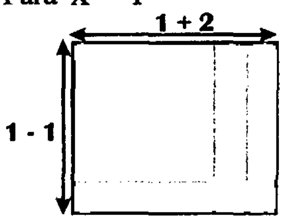
$= \quad 0$

Comprueba si las soluciones son: X = 1 y X = -2.

Resolución

Sustituimos los valores -1 y -2 en el rectángulo, para comprobar si son o no soluciones

Para $x=1$



$= \quad 0$

Recordando de la clase anterior.

Área $_{\text{Rectángulo}}$ **= Base x Altura**

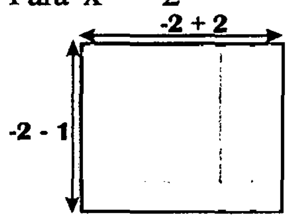
$\rightarrow (1-1)(1+2)=0$

$(0)(3)=0$

$0=0$

La igualdad se cumple para X = 1

Para $x=-2$



$= \quad 0$

Recordando de la clase anterior.

Área $_{\text{Rectángulo}}$ **= Base x Altura**

$\rightarrow (-2-1)(-2+2)=0$

$(-3)(0)=0$

$0=0$

La igualdad se cumple para X = -2

Por tanto, los valores **X = 1 y X = -2 son soluciones de la ecuación:** $(x-1)(x+2)=0$

Comprueba si alguno de estos valores **X = 1, X = -2, X = 0, X = -1, X = 5, y X = -5,** son soluciones de:

a) $x(x+1)=0$

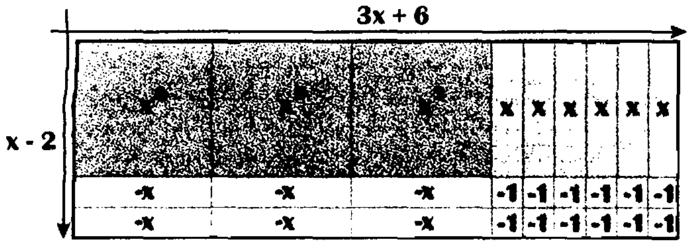
b) $(x+2)^2=0$

c) $(x-5)(x+5)=0$

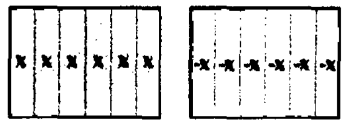
15) Resolver las siguientes ecuaciones usando los algeplano.

Recordando el ejemplo visto en clase para: $3x^2 - 12 = 0$

Primero.- Construimos un rectángulo, completando con las piezas del algeplano rectangular (X y -X).



Aprovechando la nota de la página anterior donde dice "pares de valores opuestos se anulan", por el principio de cero



***Ojo**: hemos aumentado 6 rectángulos rojos y verdes, para completar el rectángulo.*

Segundo.- Escribimos la expresión factorizada equivalente a $3x^2 - 12 = 0$ obtenida a partir de la construcción.

$$\Rightarrow 3x^2 - 12 = (x-2)(3x+6)$$

Tercero.- Resolviendo la ecuación equivalente obtenida:

Recuerda para que un producto sea cero, uno de los factores (o los dos) debe ser cero.

$$(x-2)(3x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si, } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ \text{Si, } 3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{6}{3} = -2 \end{cases}$$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: = {-2, 2}**

a) $x^2 - 9 = 0$

Primero.- Construye un rectángulo o cuadrado, completando con las piezas del algeplano rectangular (X y -X).

Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $x^2 - 9 = 0$ obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow x^2 - 9 = (\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots)$

Tercero.- Resolviendo la ecuación equivalente obtenida:

$(\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots) = 0 \Rightarrow$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: = { }**

b) $4x^2 - 1 = 0$

Primero.- Construye un rectángulo o cuadrado, completando con las piezas del algeplano rectangular (X y -X).

Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $4x^2 - 1 = 0$ obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow 4x^2 - 1 = (\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots)$

Tercero.- Resolviendo la ecuación equivalente obtenida:

$(\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots) = 0 \Rightarrow$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

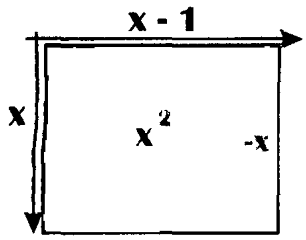
Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: = { }**

16) Resolver las siguientes ecuaciones usando los algeplano.

Recordando el ejemplo visto en clase para: $x^2 - x = 0$

Primero.- Construimos un rectángulo, con las piezas del algeplano.



Segundo.- Escribimos la expresión factorizada equivalente a $x^2 - x = 0$ obtenida a partir de la construcción.

$$\Rightarrow x^2 - x = (x)(x-1)$$

Tercero.- Resolviendo la ecuación equivalente obtenida:

Recuerda para que un producto sea cero, uno de los factores (o los dos) debe ser cero.

$(x)(x-1) = 0 \Rightarrow$ Si, $x = 0$; Si, $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es:** = $\{0,1\}$

a) $x^2 - 5x = 0$

Primero.- Construye un rectángulo, con las piezas del algeplano.

Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $x^2 - 5x = 0$ obtenida a partir de la construcción.

$$\Rightarrow x^2 - 5x = (\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

Tercero.- Resuelve la ecuación equivalente obtenida:

$(\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots) = 0 \Rightarrow$ Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \Rightarrow x =$; Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \Rightarrow x =$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: = { }**

b) $x^2 - 10x = 0$

Primero.- Construye un rectángulo, con las piezas del algeplano.

Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $x^2 - 10x = 0$ obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow x^2 - 10x = (..........)(.........)$

Tercero.- Resuelve la ecuación equivalente obtenida:

$(..........)(.........) = 0 \Rightarrow$

Si, ... $= 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

Si, ... $= 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: = { }**

17) Resuelve "extrayendo el factor común X" las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas.

Ejemplo resolver la siguiente ecuación incompleta $2x^2 - 6x = 0$ extrayendo el factor común X

Resolución

☞ Extrayendo el factor común x, obtenemos:

$2x^2 - 6x = x(2x - 6)$

☞ Resolviendo la ecuación equivalente obtenida.

$x(2x-6) = 0 \Rightarrow$

Si, $x = 0$

Si, $2x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{2} = 3$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: = { 0; 3 }**

a) $x^2 + 3x = 0$

b) $2x^2 - 8x = 0$

c) $x^2 - \frac{1}{3}x = 0$

d) $2x^2 - 5x = 0$

e) $3x^2 - 21x = 0$

Recordando sobre los coeficientes y suma de raíces de una ecuación cuadrática.

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

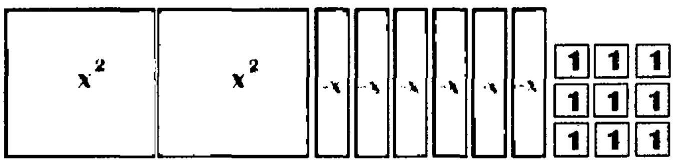
- El coeficiente "a" se llama coeficiente **cuadrática** o de **segundo grado**.
- El coeficiente "b" se llama coeficiente **lineal** o de **primer grado.**
- El coeficiente "c" se llama termino **Independiente**.

☺ **Suma de raíces**

$$\boxed{\therefore x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$$

18) De las siguientes representaciones geométricas de una ecuación cuadrática con las piezas del algeplano, calcular la suma de sus raíces.

Recordando el ejemplo de la clase. Dada la siguiente representación geométrica de una ecuación cuadrática con algeplanos, calcular la suma de sus raíces.



$= \quad 0$

Resolución

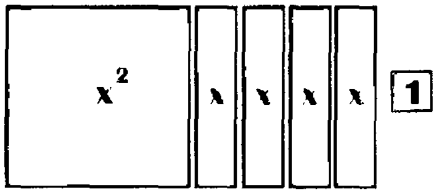
Primero.- Representamos en forma simbólica dicha representación, y esto es.

$$2x^2 - 6x + 9 = 0$$

Segundo.- Identifiquemos los coeficientes del término cuadrático y lineal.
$\Rightarrow$ a = 2 y b = -6

Tercero.- Remplacemos los coeficientes determinados en la formula $\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-(-6)}{2} = \frac{6}{2} = 3$, **Por lo tanto la suma de las raíces es: 3**

a)  $= 0$

Primero.- Representar en forma simbólica y simplificada dicha representación.

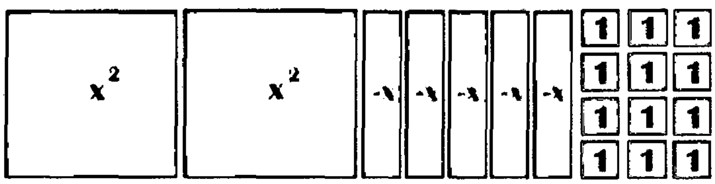
Segundo.- Identifique los coeficientes del término cuadrático y lineal.

$\Rightarrow$ a = ………, b = ……………

Tercero.- Remplace los coeficientes determinados en la formula $\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$

$\Rightarrow x_1 + x_2 =$

Por lo tanto la suma de las raíces es:____________________

b)  $= 0$

Primero.- Representar en forma simbólica y simplificada dicha representación.

Segundo.- Identifique los coeficientes del término cuadrático y lineal.

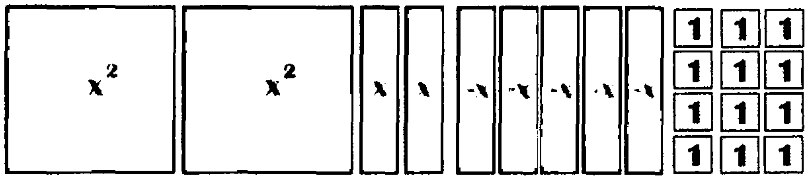
$\Rightarrow$ a = ………, b = ……………

Tercero.- Remplace los coeficientes determinados en la formula $\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}}$

$\Rightarrow x_1 + x_2 =$

Por lo tanto la suma de las raíces es:_______________

c)



$= 0$

Primero.- Representar en forma simbólica y simplificada dicha representación.

Segundo.- Identifique los coeficientes del término cuadrático y lineal.

$\Rightarrow$ a = ………, b = ……………

Tercero.- Remplace los coeficientes determinados en la formula $\boxed{x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}}$

$\Rightarrow x_1 + x_2 =$

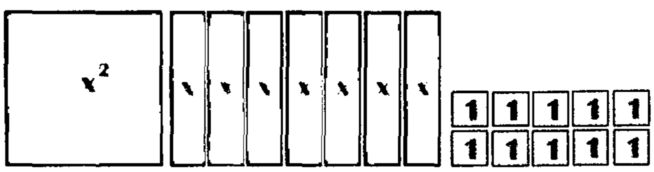
Por lo tanto la suma de las raíces es:________________

19) De las siguientes representaciones geométricas de una ecuación cuadrática con las piezas del algeplano, calcular el producto de sus raíces.

Recordando la formula y ejemplo del producto de raíces

$$\boxed{\therefore x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$

Ejemplos. De la siguiente representación geométrica de una ecuación cuadrática con los algeplanos, Calcular el producto de sus raíces.



$= 0$

Resolución

Primero.- Representamos en forma simbólica y simplificada dicha representación.

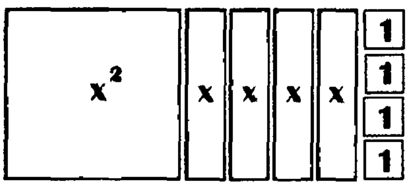
$$x^2 + 7x + 10 = 0$$

Segundo.- Identificaremos los coeficientes del término cuadrático e independiente.

$\Rightarrow$ **a = 1 y c = 10**

Tercero.- Remplacemos los coeficientes determinados en la formula $\boxed{x_1.x_2 = \frac{c}{a}}$

$\Rightarrow x_1.x_2 = \frac{10}{1} = 10$, **Por lo tanto el producto de las raíces es: 10**

a) 

$= 0$

Primero.- Representar en forma simbólica y simplificada dicha representación.

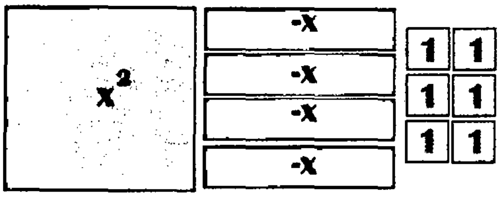
Segundo.- Identifique los coeficientes del término cuadrático e independiente.

$\Rightarrow$ **a** = ………., **c** = ……………

Tercero.- Remplace los coeficientes determinados en la formula $\boxed{x_1.x_2 = \frac{c}{a}}$

$\Rightarrow x_1.x_2 =$

Por lo tanto el producto de las raíces es:______________________

b) 

$= 0$

Primero.- Representar en forma simbólica y simplificada dicha representación.

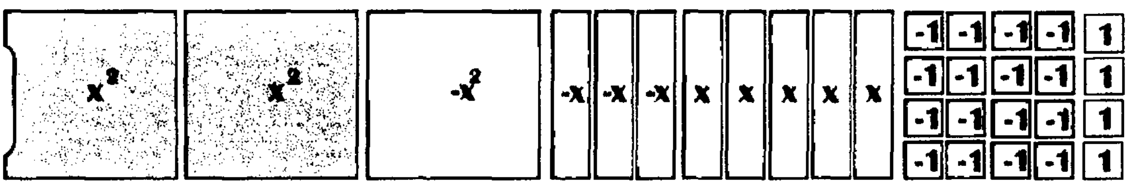
Segundo.- Identifique los coeficientes del término cuadrático e independiente.

$\Rightarrow$ a = ………, c = ……………

Tercero.- Remplace los coeficientes determinados en la formula $\boxed{x_1.x_2 = \frac{c}{a}}$

$\Rightarrow x_1.x_2 =$

Por lo tanto el producto de las raíces es:__________________

c) 

$= 0$

Primero.- Representar en forma simbólica y simplificada dicha representación.

Segundo.- Identifique los coeficientes del término cuadrático e independiente.

$\Rightarrow$ a = ………, c = ……………

Tercero.- Remplace los coeficientes determinados en la formula $\boxed{x_1.x_2 = \frac{c}{a}}$

$\Rightarrow x_1.x_2 =$

Por lo tanto el producto de las raíces es:__________________

Recordando la clase. Para construir una ecuación cuadrática debemos conocer las dos raíces X_1 y X_2 de una ecuación de segundo grado, esta se construye empleando la suma y producto de dichas raíces.

$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$, siendo $S = x_1 + x_2$, $P = x_1.x_2$

Ejemplo visto en clase. Escribir una ecuación cuadrática, cuyas raíces son: $x_1 = 3; x_2 = 5$

Resolución

Primero. Sabemos que
- **Suma de raíces** $S = 3 + 5 = 8$
- **Producto de raíces** $P = 3x5 = 15$

Segundo.- Aplicamos la formula $\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$, y obtenemos:

$x^2 + 8x + 15 = 0$

$\therefore$ **La ecuación es:** $x^2 - 8x + 15 = 0$

20) Formar las ecuaciones cuadráticas cuyas raíces se dan a continuación.

a) $x_1 = 5; x_2 = -3$

☞ Se Sabe que:
- **Suma de raíces** $S =$
- **Producto de raíces** $P =$

☞ Aplica la formula $\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$, y se obtiene.

……………………………………………..

$\therefore$ **La ecuación es:** ……………………………….

b) $x_1 = 3; x_2 = 1$

☞ Se Sabe que: $\begin{cases} \textbf{Suma de raíces } S = \\ \textbf{Producto de raíces } P = \end{cases}$

☞ Aplica la formula $\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$, y se obtiene.

....

$\therefore$ **La ecuación es:** ....

c) $x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{3}{2}$

☞ Se Sabe que: $\begin{cases} \textbf{Suma de raíces } S = \\ \textbf{Producto de raíces } P = \end{cases}$

☞ Aplica la formula $\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$, y se obtiene.

....

$\therefore$ **La ecuación es:** ....

d) $x_1 = -\frac{4}{3}; x_2 = \frac{1}{3}$

☞ Se Sabe que: $\begin{cases} \textbf{Suma de raíces } S = \\ \textbf{Producto de raíces } P = \end{cases}$

☞ Aplica la formula $\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$, y se obtiene

....

$\therefore$ **La ecuación es:** ....

21) Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas mediante factorización, usando las piezas del algeplano.

Nota para resolver ecuaciones por método de factorización con las piezas del algeplano.

Primero.- *Se trasladan todo los términos a un solo miembro, dejando el otro miembro igual a cero.*

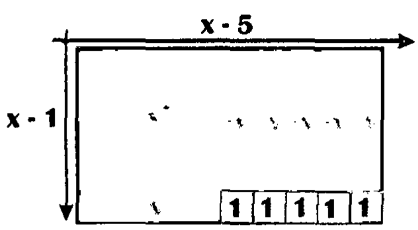
Segundo.- *Construiremos rectángulos y/o cuadrados. El cálculo del área de estas figuras nos permitirá obtener expresiones más sencillas (en forma factorizada) equivalentes (idénticas) a la expresión general de 2º grado inicial representada.*

Tercero.- *Para obtener las soluciones se iguala cada factor a cero.*

Recordando el ejemplo de la clase. **Resolver la ecuación:** $x^2 - 6x + 5 = 0$, **mediante la factorización usando las piezas del algeplano.**

Resolución:

Primero.- Construimos un rectángulo y/o cuadrado, con las piezas del algeplano.



Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $x^2 - 6x + 5 = 0$ obtenida a partir de la construcción:

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$$

Tercero.- Resolviendo la ecuación equivalente obtenida:

☞ ***Para que un producto sea cero, uno de los factores (o los dos) debe ser cero.***

$$(x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si, } x - 1 = 0 \Rightarrow x = +1 \\ \text{Si, } x - 5 = 0 \Rightarrow x = +5 \end{cases}$$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: =** $\{+1, +5\}$

a) $x^2 - 10x + 25 = 0$

Primero.- Construye un rectángulo, con las piezas del algeplano.

Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $x^2 - 10x + 25 = 0$ obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow\ x^2 - 10x + 25 = (\dots\dots\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots\dots\dots)$

Tercero.- Resuelve la ecuación equivalente obtenida:

$(\dots\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots\dots) = 0 \Rightarrow$

Si, $\dots\dots\dots\dots = 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

Si, $\dots\dots\dots\dots = 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: = { }**

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Primero.- Construye un rectángulo, con las piezas del algeplano.

Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $x^2 - 5x + 6 = 0$, obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow\ x^2 - 5x + 6 = (\dots\dots\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots\dots\dots)$

Tercero.- Resuelve la ecuación equivalente obtenida:

$(\dots\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots\dots) = 0 \Rightarrow$

Si, $\dots\dots\dots\dots = 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

Si, $\dots\dots\dots\dots = 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: = { }**

c) $x^2 - 10x - 24 = 0$

Primero.- Construye un rectángulo, con las piezas del algeplano.

Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $x^2 - 10x - 24 = 0$, obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow x^2 - 10x - 24 = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

Tercero.- Resuelve la ecuación equivalente obtenida:

$(\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots) = 0 \Rightarrow$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: = { }**

d) $x^2 - 2x - 8 = 0$

Primero.- Construye un rectángulo, con las piezas del algeplano.

Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $x^2 - 2x - 8 = 0$, obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 \Rightarrow (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

Tercero.- Resuelve la ecuación equivalente obtenida:

$(\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots) = 0 \Rightarrow$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: = { }**

e) $2x^2+13x+6=0$

Primero.- Construye un rectángulo, con las piezas del algeplano.

Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $2x^2+13x+6=0$, obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow\ 2x^2+13x+6=(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

Tercero.- Resuelve la ecuación equivalente obtenida:

$(\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)=0\ \Rightarrow$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0\quad\Rightarrow\quad x=$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0\quad\Rightarrow\quad x=$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: = {   }**

f) $3x^2+4x-32=0$

Primero.- Construye un rectángulo, con las piezas del algeplano.

Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $3x^2+4x-32=0$, obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow\ 3x^2+4x-32=(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

Tercero.- Resuelve la ecuación equivalente obtenida:

$(\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)=0\ \Rightarrow$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0\quad\Rightarrow\quad x=$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0\quad\Rightarrow\quad x=$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: = {   }**

g) $5x^2+7x-6=0$

Primero.- Construye un rectángulo, con las piezas del algeplano.

Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $5x^2+7x-6=0$, obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow 5x^2+7x-6=(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

Tercero.- Resuelve la ecuación equivalente obtenida:

$(\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots)=0 \Rightarrow$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots=0 \quad \Rightarrow \quad x=$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots=0 \quad \Rightarrow \quad x=$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: = { }**

22) Simplifica y resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas, mediante factorización.

a) $3x^2+15x+18=0$

b) $7x^2+21x-28=0$

c) $10x^2 + 20x - 30 = 0$

d) $5x^2 + 15x + 10 = 0$

e) $8x^2 + 9x - 20 = 2x^2 + 2x$

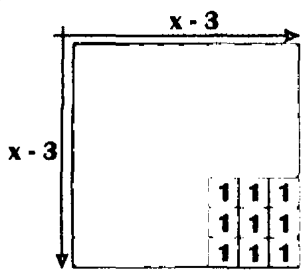
23) Repaso sobre resolución de ecuaciones cuadráticas completando cuadrados.

El método de completar cuadrados con los algeplanos, consiste en construir o completar cuadrados con las piezas del algeplano que representa el primer miembro de la ecuación cuadrática en forma general para obtener una ecuación equivalente en forma de binomio al cuadrado sin o con término independiente.

Ejemplo.

Representación de una ecuación en forma de binomio al cuadrado sin término independiente

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

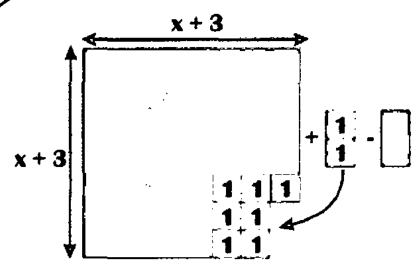


$$(x-3)(x-3) = (x-3)^2$$

$$(x-3)^2 = 0$$

Representación de una ecuación en forma de binomio al cuadrado con término independiente

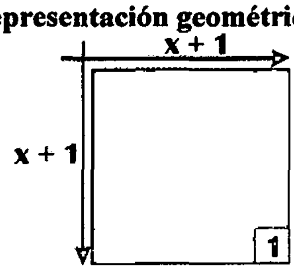
$$x^2 + 6x + 7 = 0$$



$$(x+3)(x+3) - 2 = (x+3)^2 - 2$$

$$(x+3)^2 - 2 = 0$$

24) Dada las siguientes ecuaciones cuadráticas, representar y escribir en forma de binomio al cuadrado (sin término independiente).

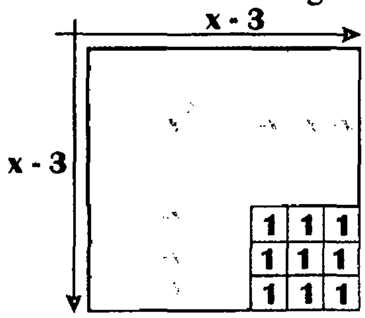
Ejemplo **Ecuación cuadrática**	**Representación geométrica**	**Ecuación en forma de binomio al cuadrado** (sin termino independiente).
a) $x^2 + 2x + 1 = 0$		$(x+1)^2 = 0$

b) $x^2 + 10x + 25 = 0$		
c) $4x^2 - 4x + 1 = 0$		
d) $4x^2 - 8x + 4 = 0$		

25) Resuelve las ecuaciones en forma de binomio al cuadrado obtenidas en el ejercicio anterior.

Recuerda la resolución de la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$ vista en clase.

Primero.- Construimos un rectángulo y/o cuadrado, con las piezas del algeplano.



Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $x^2 - 6x + 9 = 0$, obtenida a partir de la construcción.

$$\Rightarrow\ x^2 - 6x + 9 = (x-3)(x-3) = (x-3)^2$$

Tercero.- Resolviendo la ecuación equivalente obtenida:

$$(x-3)(x-3) == 0 \quad \Rightarrow$$

Si, $x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

Si, $x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: = { 3 }**

a) $x^2 + 10x + 25 = 0$

Primero.- Construye un rectángulo y/o cuadrado, con las piezas del algeplano.

Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $x^2 + 10x + 25 = 0$ obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow x^2 + 10x + 25 = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

Tercero.- Resuelve la ecuación equivalente obtenida:

$(\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots) = 0 \Rightarrow$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: = {   }**

b) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Primero.- Construye un rectángulo y/o cuadrado, con las piezas del algeplano.

Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $4x^2 - 4x + 1 = 0$ obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

Tercero.- Resuelve la ecuación equivalente obtenida:

$(\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots) = 0 \Rightarrow$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: = {   }**

c) $4x^2 - 8x + 4 = 0$

Primero.- Construye un rectángulo y/o cuadrado, con las piezas del algeplano.

Segundo.- Escriba la expresión factorizada equivalente a $4x^2 - 8x + 4 = 0$ obtenida a partir de la construcción.

$\Rightarrow 4x^2 - 8x + 4 = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

Tercero.- Resuelve la ecuación equivalente obtenida:

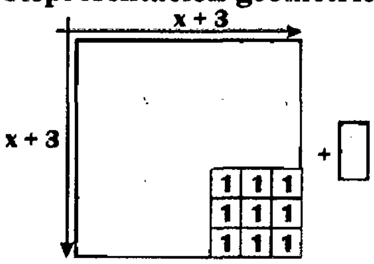
$(\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots) = 0 \Rightarrow$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

Si, $\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \quad \Rightarrow \quad x =$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación es: = { }**

26) Dada las siguientes ecuaciones cuadráticas, representar y escribir en forma de binomio al cuadrado (con término independiente). O completando cuadrados.

Ejemplo Ecuación cuadrática	Representación geométrica	Ecuación en forma de binomio al cuadrado (con termino independiente).
a) $x^2 + 6x + 7 = 0$		$(x+3)^2 - 2 = 0$
b) $x^2 - 4x + 3 = 0$		

c) $x^2+6x+3=0$		
d) $4x^2+8x+3=0$		
e) $9x^2-12x+8=0$		

27) Resuelve mediante el método de completar cuadrados las siguientes ecuaciones.

Recordando la clase

Toda ecuación cuadrática o de segundo grado de la forma: $ax^2+bx+c=0$; puede formar la forma: $(mx+n)^2=k$, tan solo completando cuadrados.

Para poder aplicar el método de completar cuadrados los coeficientes a y b de la ecuación deben cumplir las siguientes condiciones:

- *El coeficiente del término cuadrático (*a*), tiene que ser cuadrado perfecto.*
- *El coeficiente del término lineal (*b*), tiene que ser múltiplo de 2.*

En caso de que no cumpla alguna de las dos condiciones anteriores, podemos hacer que se cumpla multiplicando los dos miembros de la ecuación por $4a$.

Repaso del ejercicio desarrollado en clase. Resolver, completando cuadrados: $x^2 + 6x + 3 = 0$

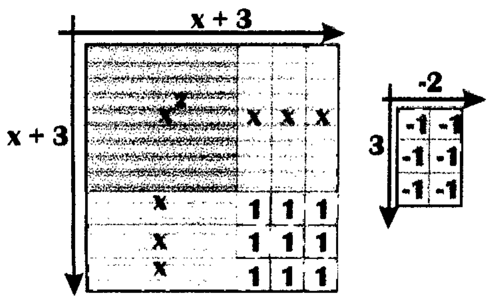
Resolución

Primero.- Comprobamos si se cumple las condiciones para la aplicación del método:

Los valores de los coeficientes son: $\begin{cases} a = 1 \Rightarrow 1^2 = 1, \text{ es un cuadrado perfecto.} \\ b = 6 \Rightarrow \dfrac{6}{2} = 3, \text{ es múltiplo de dos.} \end{cases}$

$\therefore$ Cumple con las dos condiciones planteadas.

Segundo. Construimos o completamos un cuadrado utilizando las piezas del algeplano. Para encontrar una ecuación de forma $(mx + n)^2 = k$



Por lo tanto, obtenemos la ecuación cuadrática equivalente a $x^2 + 6x + 3 = 0$ en forma de binomio al cuadrado. $(x+3)^2 - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)^2 = 6$.

Tercero. Se extraen las raíces de los dos miembros; anteponiendo el signo de la raíz al termino 6.

$$\sqrt{(x+3)^2} = \pm\sqrt{6} \Rightarrow (x+3) = \pm\sqrt{6}$$

Donde:

☞ $x + 3 = +\sqrt{6} \Rightarrow x = +\sqrt{6} - 3$

☞ $x + 3 = -\sqrt{6} \Rightarrow x = -\sqrt{6} - 3$

$\therefore$ El conjunto solución de la ecuación: $x^2 + 6x + 3 = 0$; es: $= \{-\sqrt{6} - 3; +\sqrt{6} - 3\}$

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

Primero.- Comprueba si cumple las condiciones para la aplicación del método:

Los valores de los coeficientes son: $\begin{cases} a = \dots\dots \Rightarrow \\ b = \dots\dots \Rightarrow \end{cases}$

$\therefore$ ....

Segundo. Construye o completa un cuadrado utilizando las piezas del algeplano. Para encontrar una ecuación de forma $(mx+n)^2 = k$

Por lo tanto, se obtiene la ecuación cuadrática equivalente a $x^2 - 4x + 3 = 0$ en forma de binomio al cuadrado. ....

Tercero. Extrae las raíces de los dos miembros; anteponiendo el signo de la raíz al término encontrado.

$\sqrt{(\dots\dots)^2} = \pm\sqrt{\dots\dots} \Rightarrow (\dots\dots) = \pm\sqrt{\dots\dots}$

Donde:

☛ $\dots\dots = +\sqrt{\dots\dots} \Rightarrow x = +$

☛ $\dots\dots = -\sqrt{\dots\dots} \Rightarrow x = -$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación** $x^2 - 4x + 3 = 0$ **es: = {** **}**

b) $x^2 + 6x + 3 = 0$

Primero.- Comprueba si cumple las condiciones para la aplicación del método:

Los valores de los coeficientes son: $\begin{cases} a = \dots\dots \Rightarrow \\ b = \dots\dots \Rightarrow \end{cases}$

$\therefore$ ....

Segundo. Construye o completa un cuadrado utilizando las piezas del algeplano. Para encontrar una ecuación de forma $(mx+n)^2 = k$

Por lo tanto, se obtiene la ecuación cuadrática equivalente a $x^2+6x+3=0$ en forma de binomio al cuadrado. ……………………………………………………………..

Tercero. Extrae las raíces de los dos miembros; anteponiendo el signo de la raíz al término encontrado.

$\sqrt{(\text{.........})^2} = \pm\sqrt{\text{.......}} \Rightarrow (\text{..........}) = \pm\sqrt{\text{.........}}$

Donde:

- ☞ $\text{............} = +\sqrt{\text{.........}} \Rightarrow x = +$
- ☞ $\text{............} = -\sqrt{\text{..........}} \Rightarrow x = -$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación** $x^2+6x+3=0$ **es: = {**   **}**

c) $4x^2+8x+3=0$

Primero.- Comprueba si cumple las condiciones para la aplicación del método:

Los valores de los coeficientes son: $\begin{cases} a = \text{........} \Rightarrow \\ b = \text{........} \Rightarrow \end{cases}$

$\therefore$ ………………………………………………..

Segundo. Aplica el método de completar cuadrados para lo cual, construye o completa un cuadrado utilizando las piezas del algeplano. Para encontrar una ecuación de forma $(mx+n)^2 = k$

Por lo tanto, se obtiene la ecuación cuadrática equivalente a $4x^2+8x+3=0$ en forma de binomio al cuadrado. ....

Tercero. Extrae las raíces de los dos miembros; anteponiendo el signo de la raíz al término encontrado.

$\sqrt{(.........)^2} = \pm\sqrt{.......} \Rightarrow (..........) = \pm\sqrt{.........}$

Donde:

☛ $........... = +\sqrt{.........} \Rightarrow x = +$

☛ $........... = -\sqrt{.........} \Rightarrow x = -$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación** $4x^2+8x+3=0$ **es: = {**   **}**

d) $9x^2-12x+8=0$

Primero.- Comprueba si cumple las condiciones para la aplicación del método:

Los valores de los coeficientes son: $\begin{cases} a = ... \Rightarrow \\ b = ... \Rightarrow \end{cases}$

$\therefore$ ....

Segundo. Aplica el método de completar cuadrados para lo cual, construye o completa un cuadrado utilizando las piezas del algeplano. Para encontrar una ecuación de forma $(mx+n)^2 = k$

Por lo tanto, se obtiene la ecuación cuadrática equivalente a $9x^2 - 12x + 8 = 0$ en forma de binomio al cuadrado. ....

Tercero. Extrae las raíces de los dos miembros; anteponiendo el signo de la raíz al término encontrado.

$\sqrt{(.........)^2} = \pm\sqrt{.......} \Rightarrow (..........) = \pm\sqrt{.........}$

Donde:

☛ $............ = +\sqrt{.........} \Rightarrow x = +$

☛ $............ = -\sqrt{..........} \Rightarrow x = -$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación** $9x^2 - 12x + 8 = 0$ **es: = {** **}**

28) Resolver completando cuadrados

Ejemplo visto en clase. Resolver completando cuadrados: $2x^2 - 2x - 1 = 0$

Resolución

Primero.- Comprobamos si se cumple las condiciones para la aplicación del método:

Los valores de los coeficientes son: $\begin{cases} a = 2 \Rightarrow \text{, no es un cuadrado perfecto.} \\ b = -2 \Rightarrow \dfrac{-2}{2} = -1 \text{, es múltiplo de dos.} \end{cases}$

∴ ***No cumple con las condiciones planteadas.***

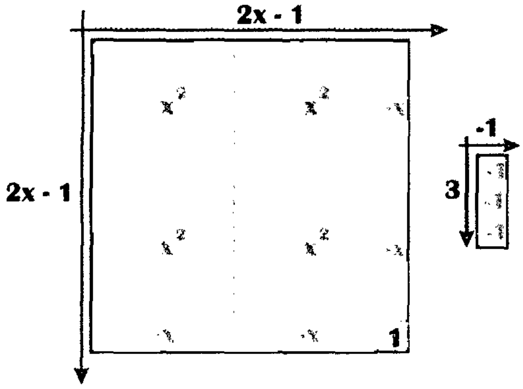
Entonces, Ajustamos los coeficientes para que se cumplan las condiciones:

- Multiplicando a todo los términos de la ecuación inicial por $4a$.

  $4(2)(2x^2 - 2x - 1) = 0 \Rightarrow 4\times 2\times 2x^2 - 4\times 2\times 2x - 4\times 2\times 1 = 0$, dividiendo por $(\frac{1}{4})$, a todo los términos de la ecuación.
- Obtenemos una nueva ecuación equivalente que si cumple las condiciones:

  $\Rightarrow 4x^2 - 4x - 2 = 0$

Segundo. Aplicamos el método de completar cuadrados para lo cual, construimos o completamos un cuadrado utilizando los algeplanos. Para encontrar una ecuación de forma $(mx + n)^2 = k$



Por lo tanto, obtenemos la ecuación cuadrática equivalente a $4x^2 - 4x - 2 = 0$ en forma de binomio al cuadrado. $(2x-1)^2 - 3 = 0 \Rightarrow (2x-1)^2 = 3$

Tercero. Se extraen las raíces de los dos miembros; anteponiendo el signo de la raíz al término 6.

$\sqrt{(2x-1)^2} = \pm\sqrt{3} \Rightarrow (2x-1) = \pm\sqrt{3}$

Donde:

a) $2x - 1 = +\sqrt{3} \Rightarrow 2x = +\sqrt{3} + 1 \Rightarrow x = \dfrac{+\sqrt{3}+1}{2}$

b) $2x - 1 = +\sqrt{3} \Rightarrow 2x = -\sqrt{3} + 1 \Rightarrow x = \dfrac{-\sqrt{3}+1}{2}$

El conjunto solución de la ecuación: $4x^2 - 4x - 2 = 0$; es: $= \left\{ -\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}; \dfrac{+\sqrt{3}+1}{2} \right\}$

a) Resolver por el método de completar cuadrados la ecuación cuadrática: $x^2 - 3x + 2 = 0$

Primero.- Comprueba si cumple las condiciones para la aplicación del método:

Los valores de los coeficientes son: $\begin{cases} a = \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \\ b = \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \end{cases}$

$\therefore$ ……………………………………………..

- **Entonces, Ajusta los coeficientes para que se cumplan las condiciones:**
  - Multiplicando a todo los términos de la ecuación inicial por $4a$.
  - Se Obtiene una nueva ecuación equivalente que si cumple las condiciones:

    $\Rightarrow$ ……………………………….

Segundo. Construye o completa un cuadrado utilizando las piezas del algeplano. Para encontrar una ecuación de forma $(mx+n)^2 = k$

Por lo tanto, se obtiene una ecuación cuadrática equivalente a $x^2 - 3x + 2 = 0$ en forma de binomio al cuadrado. ……………………………………………………………..

Tercero. Extrae las raíces de los dos miembros; anteponiendo el signo de la raíz al término encontrado.

$\sqrt{(\ldots\ldots\ldots)^2} = \pm\sqrt{\ldots\ldots\ldots} \Rightarrow (\ldots\ldots\ldots) = \pm\sqrt{\ldots\ldots\ldots}$

Donde:

☞ $\ldots\ldots\ldots\ldots = +\sqrt{\ldots\ldots\ldots} \Rightarrow x = +$

☞ $\ldots\ldots\ldots\ldots = -\sqrt{\ldots\ldots\ldots} \Rightarrow x = -$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación** $x^2 - 3x + 2 = 0$ **es: = {**   **}**

b) Resolver por el método de completar cuadrados la ecuación cuadrática: $x^2 - 5x + 5 = 0$

Primero.- Comprueba si cumple las condiciones para la aplicación del método:

Los valores de los coeficientes son: $\begin{cases} a = \ldots\ldots \Rightarrow \\ b = \ldots\ldots \Rightarrow \end{cases}$

$\therefore$ ....

- **Entonces, Ajusta los coeficientes para que se cumplan las condiciones:**
  - Multiplicando a todo los términos de la ecuación inicial por $4a$.

  - Se obtiene una nueva ecuación equivalente que si cumple las condiciones:

    $\Rightarrow$ ....

Segundo. Construye o completa un cuadrado utilizando las piezas del algeplano. Para encontrar una ecuación de forma $(mx+n)^2 = k$

Por lo tanto, se obtiene una ecuación cuadrática equivalente a $x^2 - 5x + 5 = 0$ en forma de binomio al cuadrado. ....

Tercero. Extrae las raíces de los dos miembros; anteponiendo el signo de la raíz al término encontrado.

$\sqrt{(\ldots\ldots)^2} = \pm\sqrt{\ldots\ldots} \Rightarrow (\ldots\ldots) = \pm\sqrt{\ldots\ldots}$

Donde:

☞ $\ldots\ldots = +\sqrt{\ldots\ldots} \Rightarrow x = +$

☞ $\ldots\ldots = -\sqrt{\ldots\ldots} \Rightarrow x = -$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación** $x^2 - 5x + 5 = 0$ **es: = {**   **}**

29) Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $(x-3)^2-9=0$

b) $(2x+1)^2-16=0$

c) $(x-3)^2-5=0$

d) $(2x+1)^2+4=0$

Recuerda el método general de resolución de ecuaciones cuadráticas, visto en clase. (Bhaskára)

La generalización de completar cuadrados para una ecuación de segundo grado expresada en forma general. $(ax^2 + bx + c = 0)$

Nos proporciona una formula general para obtener las soluciones o raíces de la ecuación en función de los coeficientes a, b y c.

La formula general para resolver una ecuación cuadrática es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \text{Primera solución} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \text{Segunda solución} \end{cases}$$

Los procedimientos para resolver son los siguientes:

- Determinar los valores de los coeficientes **a, b y c,** de la ecuación cuadrática expresada en forma general.
- Remplazar los valores en la formula general, y realizar las operaciones, hasta obtener las soluciones.

Ejemplo N° 01: Resolver $x^2 - 2x - 3 = 0$

Resolución

Primero. Determinemos los coeficientes a, b y c de la ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 3 = 0$

Entonces: $a = 1$, $b = -2$ y $c = -3$

La ecuación debe tener la forma: $ax^2 + bx + c = 0$, para determinar los coeficientes.

Segundo. Remplacemos los valores hallados en la formula general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$\Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\[2ex] x_2 = \dfrac{2-4}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$\therefore$ **El conjunto solución de la ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 3 = 0$, es : $\{-1;3\}$**

30) Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la formula general

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $x^2 - 4x + 7 = 0$

c) $3x^2 + 15x + 18 = 0$

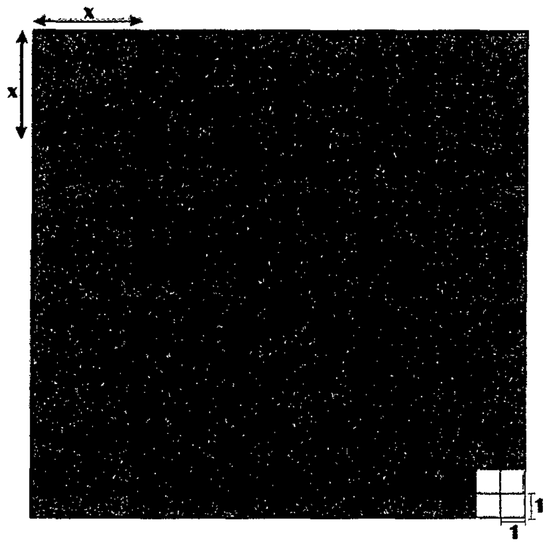
d) $7x^2 + 21x - 28 = 0$

e) $x(x - 3) = 2(x + 7)$

f) $\dfrac{2x - 1}{x + 1} = \dfrac{x + 1}{x - 2}$

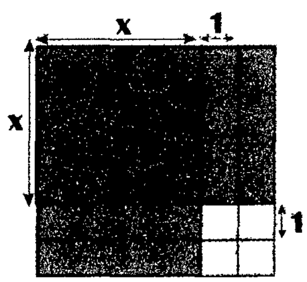
31) Resolución de problemas cotidianos usando las ecuaciones cuadráticas con los algeplanos.

a) El patio de la I.E. "Aurora Inés Tejada" tiene diferentes losetas como muestra la figura. Calcular una formula para hallar el área total del patio, si las losetas de la misma figura son iguales.



Resolución

b) Una alumna del tercer grado de la I.E. "Aurora Inés Tejada", posee un terreno en el valle de Pachachaca, dividido en parcelas como muestra la figura. Su padre desea encontrar su área total para sembrar diferentes forrajes. Si las parcelas de la misma figura son iguales. ¿Cómo lo harías?

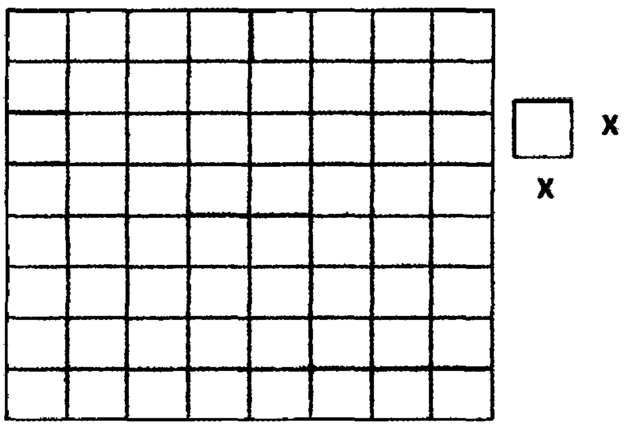


Resolución

c) En una familia los padres dejan como herencia a sus tres hijos, un terreno de área $(x+4)(x+5)$. Calcular su perímetro de dicho terreno. Si $x = 3$.

Resolución

d) Se tiene un tablero de ajedrez. Se pide hallar una expresión algebraica, que permita calcular el área de cualquier tablero.



Resolucion

☞ ***Todo buen aprendizaje se activa mejor a través del descubrimiento.***

☞ ***Una clase debe estar poblada de ejemplos y materiales educativos.***

Cualquier consulta escribir a: ***alexito_188@hotmail.com***
pumber 155@hotmail.com